HPM通訊

第九卷 第二、三期合刊 目錄（2006年3月）

- 記共研《筭數書》的一次盛會
- 歡迎琅元 (Alexei Volkov)『軟著陸』!
- 點與圓、球的關係
- 更正啓事：向沈康身教授致歉
- 秦九韶大衍求一術
- 新書櫥窗：
  分享中學數學老師出書的喜悅
  書籍介紹：《神奇數學 117》

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啓文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心) 傅聖國 （北市萬福國小）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

記共研《筭數書》的一次盛會

台師大數學系　洪萬生教授

三月三日下午 2-5 時，我們趁道本周 (Joseph Dauben) 教授訪問台灣一週之便，特別安排一次有關《筭數書》的書報討論會。爲此，我們同時邀請甫任清華大學科學史教授的琅元 (Alexei Volkov) 與城地茂 (Shigeru Jochi，高雄第一科技大學) 前來共襄盛舉，針對《筭數書》的國際研究現況，廣泛交換研究心得。事實上，這也是筆者本學期講授『古代數學典籍研讀』的第一次上課，因此，我們這一門課一開始即有嘉賓加持，成效已經可以預期！

首先，我們請蘇俊鴻針對《筭數書》與秦漢小吏的算學素養之關係，作了一個簡要的報告。其中內容，主要摘自筆者與俊鴻、蘇惠玉與林倉億合撰的《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》一書（台灣商務印書館即將出版）。本來，我們也邀請倉億針對校勘提一點新的研究心得，不過，他臨時有事無法報告，實在可惜！

茲引述俊鴻的報告大綱如下，供有興趣的讀者參考：

1. 前言
   - 《筭數書》所呈現的算學知識
   - 秦漢之際數學知識傳承與保存
2. 秦漢小吏的算學素養
   - 秦漢之際的數學與社會
   - 《筭數書》vs.《二年律令》
   - 秦漢小吏的算學素養
3. 數學知識的傳承與保存
   - 以吏為師：
     (1) 睡虎地秦簡與張家山漢墓
     (2)《筭數書》的抄寫與使用
   - 私學與家學
4. 結語

- 秦漢小吏的算學素養：《筭數書》的見證
- 秦漢官吏的養成與訓練，可能是中國秦漢時期數學知識傳承的重要機制。
- 除了國子教育的六藝外，以吏為師顯然也不可忽視，這是中國古代數學教育的恰當內容。
- 《九章算術》的用途：為何東漢將之列為計算之標準或憑藉？

至於詳細說明，則可以參考我們的《數之起源》，請拭目以待。

這一場盛會巧合了春天的來臨。這幾天師大分部的杜鵑花盛情綻放，也讓我們對於《筭數書》的研究，有了非常不一樣的體會。三月三日的書報討論，是我們團隊爲了迎接『《筭數書》暨相關漢簡國際研討會』的暖身過場。在此，我們正式宣告此一研討會將於今年 8 月 23-25 日，假本分部舉行。現在，鑼聲已響，扮仙行禮如儀，好戲就要登場了！

照片中央爲琅元教授

這位是道本周(Joseph Dauben)教授

這位是蘇俊鴻老師

歡迎琅元 (Alexei Volkov)『軟著陸』！

台師大數學系 洪萬生教授

出身俄羅斯的琅元教授從 2006 年 2 月 1 日起，正式擔任新竹清華大學歷史研究所與通識教育中心的合聘副教授。這對於台灣的數學史社群，甚至於科學史社群，是一大利多！早在 1993 年我在西班牙 Zaragoza 與琅元第一次見面時，我就力邀他前來台灣與我們共同努力，現在果真如願，這絕對是 2006 年我們通訊團隊的一件大事。

琅元在中國數學史的研究，譬如劉徽注、唐代數學教育史，乃至於趙友欽的數（科學）學與道教等等，都有相當獨到的建樹。這幾年內，他又將研究重點轉向越南數學史與醫學史，成為這一領域的開路先鋒與國際學界之權威。現在，他一定可以充分利用台灣學術界的利基，為他自己以及在地的學術社群，做出更大的貢獻。我們絕對相信他與台灣數學史社群，一定可以相得益彰、相輔相成！

琅元老友，我們至誠地歡迎你！

這是 2004 年 5 月台中「歷史、文化與資訊時代的數學教育」研討會參觀東勢國中的活動照片

點與圓、球的關係

北市成功高中 游經祥、劉國莉老師

壹、前言：

在本校自然資優班的一次數學課堂中，講到過圓 C: $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 上一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線公式(*) $x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$ 時，有一位學生提出問題如下：

當點 P 分別在圓外及圓內時，此公式所代表的幾何意義爲何？同樣的，如果在球面的情況下，其幾何意義爲何？

這問題在班上也引起了激烈的討論，本人也在該堂課中講述了點 P 在圓外時的情形，並作一些證明。下課後又與劉國莉老師討論此問題，於是便將這問題作了以下的延伸探討：

1. 點 P 在圓 C 上的切線公式證明。
2. 點 P 在圓 C 外時，公式(*)的幾何意義及證明。
3. 點 P 在圓 C 內時，公式(*)的幾何意義及證明。
4. 點 P 在球面 S 上的切平面公式的幾何意義及證明。
5. 點 P 在球面 S 外時，切平面公式的幾何意義及證明。
6. 點 P 在球面 S 內時，切平面公式的幾何意義及證明。
7. 以根軸、根平面的觀點分別來探討公式(*)與切平面公式的幾何意義與證明。

貳、點與圓的公式探討：

以下討論中，我們考慮：圓 C: $x^2+y^2+dx+ey+f=0$；點 $P(x_0,y_0)$；直線

L: $x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$ 。

性質 1：若點 P 在圓 C 上，則直線 L 爲過點 P 的切線。

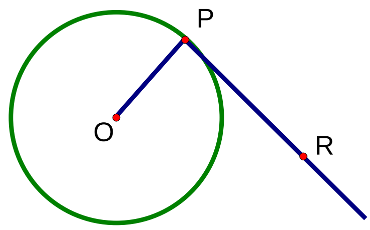
證明：

如圖，圓心 $O\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，點 $P(x_0,y_0)$，設 $R(x,y)$ 爲過點 P 的切線上的任一點，則

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{PR}$

$\Rightarrow (x-x_0,y-y_0)\cdot\left(x_0+\frac{d}{2},y_0+\frac{e}{2}\right)=0$

$\Rightarrow (x-x_0)\left(x_0+\frac{d}{2}\right)+(y-y_0)\left(y_0+\frac{e}{2}\right)=0$

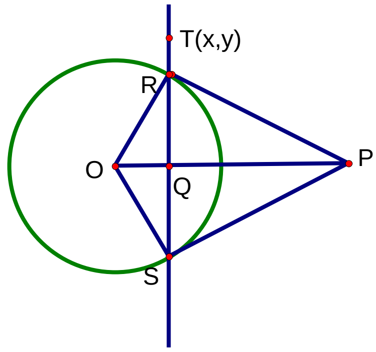


$\because x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f=0$ ，上式可化簡爲 $x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$ ，

故過圓上一點 P(x_0, y_0)的切線方程式爲直線 L： $x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$ 。

性質 2：設點 P 在圓 C 外，且過點 P 作圓 C 的切線，得切點分別爲 R、S，則直線 L 爲通過切點 R、S 的直線。

證明（一）：



如圖，圓心 O$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，點 P$(x_0, y_0)$在圓外，R、S 爲切點，連接$\overline{OR},\overline{OP},\overline{OS},\overline{RS}$ ，設$\overline{OP}$和$\overline{RS}$交於 Q，

$\because \angle ORP=90^0=\angle OQR \Rightarrow \Delta ORP \sim \Delta OQR,$所以$\overline{OQ}\cdot\overline{OP}=r^2$

。$\overleftrightarrow{RS}$ 爲通過 Q 點且垂直$\overleftrightarrow{OP}$的直線，設

$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OP} \Rightarrow t=\frac{\left|\overrightarrow{OQ}\right|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\frac{r^2}{\overline{OP}^2}$ ，$\therefore \overrightarrow{OQ}=\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\overrightarrow{OP}$ ，因此 Q 點

座標爲$\left(\frac{-d}{2}+\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(x_0+\frac{d}{2}\right),\frac{-e}{2}+\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(y_0+\frac{e}{2}\right)\right)$。設直線$\overleftrightarrow{RS}$ 上任一點 T(x,y) ，利用

$\overrightarrow{TQ}\perp\overrightarrow{OP}$ ，所以直線$\overleftrightarrow{RS}$ 的直線方程式爲

$$\left(x+\frac{d}{2}-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(x_0+\frac{d}{2}\right),y+\frac{e}{2}-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(y_0+\frac{e}{2}\right)\right)\bullet\left(x_0+\frac{d}{2},y_0+\frac{e}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{d}{2}\right)\left(x_0+\frac{d}{2}\right)-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)\left(y_0+\frac{e}{2}\right)-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(y_0+\frac{e}{2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{d}{2}\right)\left(x_0+\frac{d}{2}\right)+\left(y+\frac{e}{2}\right)\left(y_0+\frac{e}{2}\right)-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)^2\right)=0$$

$\because \overline{OP}^2=\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)^2, r^2=\frac{d^2+e^2-4f}{4}$ ，上式可化爲

$$x_0x+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{d^2}{4}+y_0y+\frac{e}{2}(y+y_0)+\frac{e^2}{4}-\frac{d^2+e^2-4f}{4}=0$$

$$\Rightarrow x_0x+\frac{d}{2}(x+x_0)+y_0y+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$$

，故得證：直線 L 即為直線 $\overleftrightarrow{RS}$ 。

證明（二）：
設切點 R(x_1, y_1) ，切點 S(x_2, y_2) ，則利用性質 1 得過 R、S 的切線公式分別為

$\overleftrightarrow{PR}: x_1x + y_1y + \frac{d}{2}(x + x_1) + \frac{e}{2}(y + y_1) + f = 0$ ，

$\overleftrightarrow{PS}: x_2x + y_2y + \frac{d}{2}(x + x_1) + \frac{e}{2}(y + y_1) + f = 0$ ，

又點 P 分別在 $\overleftrightarrow{PR}$ 、 $\overleftrightarrow{PS}$ 兩直線上，故得：

$x_1x_0 + y_1y_0 + \frac{d}{2}(x_0 + x_1) + \frac{e}{2}(y_0 + y_1) + f = 0$ ，---(1)

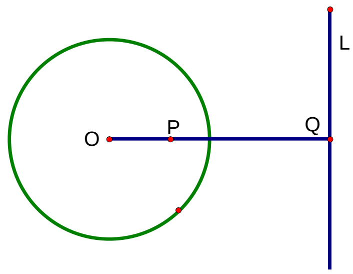
$x_2x_0 + y_2y_0 + \frac{d}{2}(x_0 + x_1) + \frac{e}{2}(y_0 + y_1) + f = 0$ ，---(2)

由(1)式得知點 R 在直線 L 上，由(2)式得知點 S 在直線 L 上，故得證：直線 L 通過 R、S 兩點。
(此證法同康熙版第三冊教師手冊中所提)

性質 3：設點 P 在圓 C 內，則直線 L 與圓 C 不相交。此時 $\overleftrightarrow{OP} \perp L$（設交點為 Q），且滿足

$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$ ，其中點 P 介於圓心 O 與點 Q 之間。

證明：



如圖：圓心 O$\left(\frac{-d}{2}, \frac{-e}{2}\right)$，點 P$(x_0, y_0)$ ，$\overrightarrow{OP} = \left(x_0 + \frac{d}{2}, y_0 + \frac{e}{2}\right)$ ；
直線
L: $x_0x + y_0y + \frac{d}{2}(x + x_0) + \frac{e}{2}(y + y_0) + f = 0$

$\Rightarrow \left(x_0 + \frac{d}{2}\right)x + \left(y_0 + \frac{e}{2}\right)y + \frac{dx_0}{2} + \frac{ey_0}{2} + f = 0$，即$(x_0 + \frac{d}{2}, y_0 + \frac{e}{2})$為 L 的一個法向量，故得證

$\overleftrightarrow{OP} \perp L$ 。又 O 到 L 的距離等於 $\overline{OQ} = \dfrac{\left|\left(x_0 + \frac{d}{2}\right)\left(\frac{-d}{2}\right) + \left(y_0 + \frac{e}{2}\right)\left(\frac{-e}{2}\right) + \frac{d}{2}x_0 + \frac{e}{2}y_0 + f\right|}{\sqrt{\left(x_0 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{e}{2}\right)^2}}$ ，

$\overline{OP} = \sqrt{\left(x_0 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{e}{2}\right)^2}$ ，故 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \left|\frac{-d^2}{4} + \frac{-e^2}{4} + f\right| = r^2$ 。又點 P 在圓 C 內，$\overline{OP} < r$ ，

因此$\overline{OQ} > r$ ，故直線 L 與圓 C 不相交。

事實上，由性質 1、2、3 中可發現，當點 P 在圓外、圓上或圓內時，皆滿足$\overleftrightarrow{OP} \perp L$ ，且

$\overline{OP} \cdot d\left(O, L\right) = r^2$ 。我們寫成下面的定理：

定理 A：

(1) 設坐標平面上，圓 C: $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$的圓心 O 且直線

L: $x_0 x + y_0 y + \frac{d}{2}\left(x + x_0\right) + \frac{e}{2}\left(y + y_0\right) + f = 0$，若點 P 為異於圓心 O 的任一點，則$\overleftrightarrow{OP} \perp L$ ，

且$\overline{OP} \cdot d\left(O, L\right) = r^2$ 。

(2) 若直線$\overleftrightarrow{OP}$與直線 L 的交點 Q，則 P、Q 為關於圓 C 的對稱點。當點 P 離圓心越近，則 L 離圓心越遠。當點 P 趨向無窮遠處，則直線 L 為過圓心之直線。

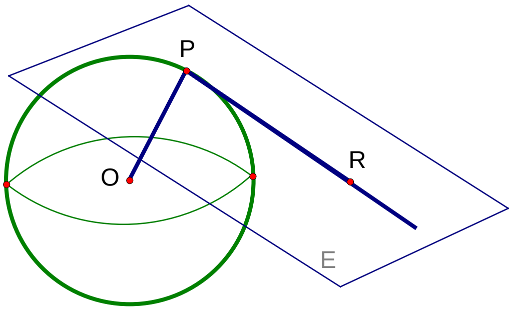
參、點與球的公式探討：

以下討論中，我們考慮：空間中球面 S: $x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$ ；點 P$\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ；

平面 E: $x_0 x + y_0 y + z_0 z + \frac{d}{2}\left(x + x_0\right) + \frac{e}{2}\left(y + y_0\right) + \frac{f}{2}\left(z + z_0\right) + g = 0$

性質 1：若點 P 在球 S 上，則平面 E 為過 P 點的切平面。

證明：



如圖，球心 O$\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}, -\frac{f}{2}\right)$，點 P$\left(x_0, y_0, z_0\right)$，設 R$\left(x, y, z\right)$為過 P 點的切平面上的點，則

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PR}$

$\Rightarrow \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) \bullet \left(x_0 + \frac{d}{2}, y_0 + \frac{e}{2}, z_0 + \frac{f}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x - x_0\right)\left(x_0 + \frac{d}{2}\right) + \left(y - y_0\right)\left(y_0 + \frac{e}{2}\right) + \left(z - z_0\right)\left(z_0 + \frac{f}{2}\right) = 0$

$\because x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 + dx_0 + ey_0 + fz_0 + g = 0$ ，上式可化簡為

$x_0 x + y_0 y + z_0 z + \frac{d}{2}\left(x + x_0\right) + \frac{e}{2}\left(y + y_0\right) + \frac{f}{2}\left(z + z_0\right) + g = 0$ ，

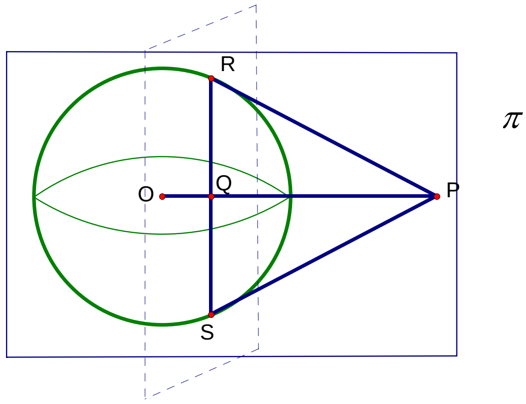
故過球上一點 P$\left(x_0, y_0, z_0\right)$的切平面方程式為

$$x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+\frac{f}{2}(z+z_0)+g=0$$ 。

性質 2：若點 P 在球面外，自點 P 作球面的切線，則平面 E 表示所有切點所在的平面方程式。

證明：

如圖，球心 O，點 P 在球面外。先作一包含$\overleftrightarrow{OP}$的平面π，設平面π和球 S 交於圓 C，自 P 作圓 C 的切線，設切點爲 R、S（R、S 亦爲 P 對球的切點），$\overleftrightarrow{RS}$和$\overleftrightarrow{OP}$交於 Q。



此時可知$\overleftrightarrow{RS}\perp\overleftrightarrow{OP}$且$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$。今以$\overleftrightarrow{OP}$爲軸將$\overleftrightarrow{RS}$旋轉一圈，會包含所有點 P 對球面所作的切點，因此所有切點皆在以$\overleftrightarrow{OP}$爲法向量且過 Q 點的平面上。接著同貳.性質 2 中可推出點 Q 座標爲

$$\left(\frac{-d}{2}+\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(x_0+\frac{d}{2}\right),\frac{-e}{2}+\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(y_0+\frac{e}{2}\right),\frac{-f}{2}+\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(z_0+\frac{f}{2}\right)\right)$$，

$\overrightarrow{OP}=\left(x_0+\frac{d}{2},y_0+\frac{e}{2},z_0+\frac{f}{2}\right)$，因此以$\overleftrightarrow{OP}$爲法向量且過 Q 點的平面方程式爲

$$\left(x+\frac{d}{2}-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(x_0+\frac{d}{2}\right),y+\frac{e}{2}-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(y_0+\frac{e}{2}\right),z+\frac{f}{2}-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(z_0+\frac{f}{2}\right)\right)\bullet\left(x_0+\frac{d}{2},y_0+\frac{e}{2},z_0+\frac{f}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{d}{2}\right)\left(x_0+\frac{d}{2}\right)+\left(y+\frac{e}{2}\right)\left(y_0+\frac{e}{2}\right)+\left(z+\frac{f}{2}\right)\left(z_0+\frac{f}{2}\right)-\frac{r^2}{\overline{OP}^2}\left(\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)^2+\left(z_0+\frac{f}{2}\right)^2\right)=0$$

化簡後得$x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+\frac{f}{2}(z+z_0)+g=0$ 。

性質 3：若點 P 在球面 S 內，則平面 E 爲與球面 S 不相交，此時$\overleftrightarrow{OP}$爲平面 E 的法向量。

設點 P 在平面 E 的投影點爲 Q，則$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$。證明同貳.性質 3 中所述。

簡單說明如下：

球心 O$\left(\frac{-d}{2},\frac{-e}{2},\frac{-f}{2}\right)$，點 P$(x_0,y_0,z_0)$，$\overrightarrow{OP}=\left(x_0+\frac{d}{2},y_0+\frac{e}{2},z_0+\frac{f}{2}\right)$；平面

E: $x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+\frac{f}{2}(z+z_0)+g=0$

$\Rightarrow\left(x_0+\frac{d}{2}\right)x+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)y+\left(z_0+\frac{f}{2}\right)+\frac{dx_0}{2}+\frac{ey_0}{2}+\frac{fz_0}{2}+g=0$，即$(x_0+\frac{d}{2},y_0+\frac{e}{2},z_0+\frac{f}{2})$爲平面 E 的法向量，可知$\overleftrightarrow{OP}\perp L$。又 O 到平面 E 的距離等於

$$\overline{OQ}=\frac{\left|\left(x_0+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{-d}{2}\right)+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)\left(\frac{-e}{2}\right)+\left(z_0+\frac{f}{2}\right)\left(\frac{-f}{2}\right)+\frac{d}{2}x_0+\frac{e}{2}y_0+\frac{f}{2}z_0+g\right|}{\sqrt{\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)^2+\left(z_0+\frac{f}{2}\right)^2}},$$

$\overline{OP}=\sqrt{\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)^2+\left(z_0+\frac{f}{2}\right)^2}$，故$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\left|\frac{-d^2}{4}+\frac{-e^2}{4}+\frac{-f^2}{4}+g\right|=r^2$。又點 P 在球內，$\overline{OP}<r$，所以$\overline{OQ}>r$，故平面 E 爲與球面 S 不相交。

與圓的情況相同，當點 P 在球面上或球面外或球面內時，皆滿足$\overleftrightarrow{OP}\perp E$，且$\overline{OP}\cdot d(O,E)=r^2$。我們寫成下面的定理：

定理 B：

(1)設空間坐標中，球面 S: $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$的球心 O；且平面 E: $x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+\frac{f}{2}(z+z_0)+g=0$，若點 P 爲異於球心 O 的任一點，則$\overleftrightarrow{OP}\perp E$，且$\overline{OP}\cdot d(O,E)=r^2$。

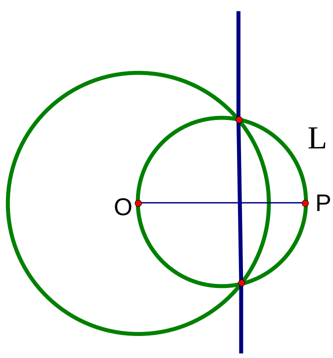
(2)設點 P 在平面 E 的投影點爲點 Q，則 P、Q 爲關於球面 S 的對稱點。當點 P 離球心越近，則平面 E 離球心越遠。當點 P 趨向無窮遠處，則平面 E 爲過球心的平面。

肆、有關根軸與根平面的探討：

在康熙版第四冊教師手冊中介紹有關兩個圓的根軸爲滿足到兩個圓的切線段長度相等所形成的圖形，根軸的方程式等於兩個圓的方程式相減。現在我們得到以下定理。

定理 C：

設圓 C: $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，圓心 O；點 $P(x_0,y_0)$；直線 L: $x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$；假設圓 C’爲以$\overline{OP}$爲直徑所形成的圓，若點 P 爲異於點 O 的任一點，則直線 L 恰爲圓 C 和圓 C’的根軸。



證明：圓心 O$\left(\frac{-d}{2},\frac{-e}{2}\right)$，點 P$\left(x_0,y_0\right)$，圓 C'方程式爲

$\left(x+\frac{d}{2}\right)\left(x-x_0\right)+\left(y+\frac{e}{2}\right)\left(y-y_0\right)=0 \Rightarrow x^2-xx_0+\frac{d}{2}\left(x-x_0\right)+y^2-yy_0+\frac{e}{2}\left(y-y_0\right)=0$。因此，圓 C 和圓 C'的根軸方程式爲

$$x^2+y^2+dx+ey+f-\left(x^2-xx_0+\frac{d}{2}\left(x-x_0\right)+y^2-yy_0+\frac{e}{2}\left(y-y_0\right)\right)=0$$

$\Rightarrow x_0x+y_0y+\frac{d}{2}\left(x+x_0\right)+\frac{e}{2}\left(y+y_0\right)+f=0$。

同理，有關球面的部分也有同樣的結果。

定理 D：空間中球面 S: $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，球心 O；點 P$\left(x_0,y_0,z_0\right)$；平面 E: $x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}\left(x+x_0\right)+\frac{e}{2}\left(y+y_0\right)+\frac{f}{2}\left(z+z_0\right)+g=0$，假設球面 S'爲以$\overline{OP}$爲直徑所形成的球面，若點 P 爲異於球心 O 的任一點，則平面 E 恰爲球面 S 和球面 S'的根平面。其中根平面即表示空間中到球面 S 和球面 S'的切線段等長的所有點所成的圖形。

伍、結論：

在教學過程中，學生有時會提出很好的問題，如果能仔細思考或推廣，往往會得到意想不到的結果。回憶 82 年度的自然組聯考考題：

設 L 爲一通過橢圓$\Gamma_1:\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=\frac{1}{4}$與橢圓$\Gamma_2:4x^2+3y^2-18y+25=0$兩交點的直線，求 L 的方程式，及橢圓$\Gamma_2$中心點到直線 L 的距離。

在這聯考題中，也已經用到橢圓根軸的概念。因此，我們似乎已經看到本篇可以再推廣到所有圓錐曲線，而可能得到相類似的結果。有興趣的同好，也可以提出推廣後的結果，大家一起成長。

更正啟事

李迪教授 2006 年 2 月 18 日賜函，其中提及：「今日又取出〔《HPM 通訊》第九卷第一期〕拜閱，當讀到陳敏皓的對《九章算術》英譯的評論時使我大吃一驚，把沈康身先生的生卒年都注上，而且都錯！其生年不是 1955 而是 1925；而說卒於 2002 年问題就大了，實際上現在還建在。」本刊對於一重大過失深感愧疚，除了必須向沈教授致上最真誠的歉意之外，也要藉此向他的朋友、同事與學生，一併表達深刻的虧欠與自省。同時，李迪教授的指正，也讓我們有機會及時處理。在此，我們也必須向他深深一鞠躬：李老師，真是謝謝您了！

秦九韶大衍求一術

台師大數學系四年級 徐政業、李昌翰、曾仲麟

一、前言

在《高中數學》第一冊『整數論』中，有一個非學習不可的段考必考題：

求 5005 與 4277 的最大公因數，並找出一組整數解 (m,n) 滿足

$5005m+4277n=(5005,4277)$ 的形式。（參見本文附錄）

以前高中老師在教我們這一單元時，是先利用輾轉相除法求出 5005 與 4277 的最大公因數。將原式中的最大公因數除掉之後（也就是等號的右邊爲 1），再利用『秦九韶取一術』去解整數解 (m,n)。解法如下圖：

1	5 0 0 5	4 2 7 7	5
	4 2 7 7	3 6 4 0	
1	7 2 8	6 3 7	7
	6 3 7	6 3 7	
	9 1	0	

$\Rightarrow (5005,4277)=91$

原式可改爲 $\Rightarrow 55m+47n=1$

將剛才輾轉相除法中的商（也就是左右兩側的數字）按照順序寫下來分別爲 1、5、1（最後一位不抄），套入下表：

1			
0	1		

將商填入此
從第 1 列第 2 行起向右填

（甲）

得到

	1	5	1
1			
0	1		

（乙）

將空格算出來，算法爲：
該行第一列的值乘上該列前 1 行的值
再加上該列前 2 行的值
（如果沒有就不用加）
例如：第 2 行第 2 列＝1x1＝1
第 3 行第 3 列＝5x1+0＝5
第 4 行第 3 列＝1x5+1＝6

得到

	1	5	1
1	1	6	7
0	1	5	6

（丙）

加正負號
從圖表原先有的 1 開始
由左而右填入＋、－、＋、－、…

得到

	1	5	1
＋1	－1	＋6	－7
0	＋1	－5	＋6

（丁）

－7、6 即為所求

接著 5005、4277 與－7、6 做配對，方法是大配小；小配大（大小是指取了絕對值之後的大小）。所以，$5005\times6+4277\times(-7)=(5005,4277)$ 。也就是 $(6,-7)$ 爲一組整數解。

其中（甲）－（丁）的步驟，高中老師稱爲『秦九韶取一術』。在當時，我們也沒想這麼多，就把它拿來用就是了。現在，修過了『數學史』課程之後，我們便想起了這個有趣的題目，想看看這秦九韶到底是如何去思考這個問題，並且對這個解法給一個清楚的說明。

不過，在看過相關的資料後，赫然發現『秦九韶取一術』這一名詞好像並不常見，不知道是哪位老師或學者自創的名詞。但是，秦九韶的「大衍求一術」卻與此問題息息相關。其中的關連是什麼？要如何說明這一切呢？且待我們從『大衍求一術』娓娓道來。

二、從孫子到秦九韶

在談論『大衍求一術』之前，我們不能錯過它的源頭。在差不多五世紀時成書的《孫子算經》中，其下卷第 26 題是一個聞名世界的數學問題。這個問題有人稱它爲『孫子問題』。原題如下：

> 今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？答曰：二十三。

《孫子算經》中還給出這題的解法：

> 術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十；並之，得二百三十三，以二百一十減之即得。

接下來，本書就給這類問題的解法：

> 凡三三數之賸一，則置七十；五五數之賸一，則置二十一；七七數之賸一，則置十五；一百六以上，以一百五減之即得。

而也就是求解聯立一次同餘式的問題（即求滿足這些同餘式的最小正整數）。

若運用現代的數學符號，『孫子問題』可以『翻譯』改寫成如下：

> 有一數 N ，以 3 除之餘 2，以 5 除之餘 3，以 7 除之餘 2，問 N 是多少？

假設我們以 $N\equiv2\pmod{3}$ 表示「 N 以 3 除之餘 2」，那麼，本題就是要求出滿足

$$\begin{cases}N\equiv2\pmod{3}\\N\equiv3\pmod{5}\\N\equiv2\pmod{7}\end{cases}$$

這個同餘式的 N 值。倘若能找到一組 a_1,a_2,a_3 滿足：① a_1 以 3 除餘 1 而且 a_1 都可以被 5、7 整除；② a_2 以 5 除餘 1 而且 a_2 都可以被 3、7 整除③ a_3 以 7 除餘 1 而且 a_3 都可以被 3、5

整除，那麼，本題就簡單了。因為

$$\begin{cases} 2a_1+3a_2+2a_3 \equiv 2+0+0 \equiv 2 \pmod{3} \\ 2a_1+3a_2+2a_3 \equiv 0+3+0 \equiv 3 \pmod{5} \\ 2a_1+3a_2+2a_3 \equiv 0+0+2 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

所以，$2a_1+3a_2+2a_3$就是這個聯立一次同餘式的一組解。現在，只要將$2a_1+3a_2+2a_3$再以105（也就是 3、5、7 三數的最小公倍數）除之，所得的餘數即為滿足方程式的最小正整數。

宋人在一本筆記中，還將此一解法寫成如下四句詩：

三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇；七度上元（15）重相會，寒時清明（105）便可知。

另外，明代數學家程大位在 1592 年寫的《直指算法統宗》一書中，也將這種解法編成了孫子歌：

三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半月，除百零五便得知。

將這兩個詩歌中的『數學意義』拿出來，就是《孫子算經》中的

凡三三數之賸一，則置七十；五五數之賸一，則置二十一；七七數之賸一，則置十五；一百六以上，以一百五減之即得。

其實，在上文的符號表式中，將$a_1=70, a_2=21, a_3=15$代入，得到$N=233$。因此，我們也可以解釋孫子如何可能提出他的解法：「凡三三數之賸一，則置七十；五五數之賸一，則置二十一；七七數之賸一，則置十五；一百六以上，以一百五減之即得。」然則不過，70、21、15 究竟是怎麼來的呢？我們再回到上文的數學符號式子上進行討論：

$$\begin{cases} a_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ a_1 \equiv 0 \pmod{5} \\ a_1 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \quad \Rightarrow a_1 = 3y+1 = 35x \quad \Rightarrow 35x-3y=1$$

（這時候，就跟我們要討論題目的形式一樣了！）接著，利用輾轉相除法求 35 與－3 的最大公因數，再利用其過程中的商，可算得

$$x=2, y=23 \qquad \Rightarrow a_1=70$$

依此類推，我們可以得到，$a_2=21, a_3=15$。這種藉由輾轉相除法，以解出$Ax-By=1$形式的一次不定方程式的方法，南宋數學家秦九韶就叫做『大衍求一術』。不過，秦九韶的寫法並非如此。既然如此，我們就來討論『大衍求一術』。

『大衍求一術』是秦九韶首創的，其演算過程、方法的合理性以及歷史地位，數學史家都已有了詳實的討論。為了方便理解與比較，我們先給出現代理論的一次同餘方程組的解題步驟。

（甲）設一次同餘方程組

$$\begin{cases} N \equiv r_1 \pmod{n_1} \\ N \equiv r_2 \pmod{n_2} \\ N \equiv r_3 \pmod{n_3} \\ \quad\vdots \\ N \equiv r_m \pmod{n_m} \end{cases} \qquad (1)$$

其中，N 爲所求，n_i 爲模數，r_i 爲餘數。

（乙）判斷（1）是否可解

1.若模數兩兩互質，也就是說 $(n_i, n_j) = 1$,$\forall i \neq j$ ，則（甲）必有解。

2.若模數非兩兩互質，若滿足下列關係式則有解：

$r_i - r_j \equiv 0 \pmod{d_{ij}}$,$\forall i \neq j$ ，其中 $d_{ij} = (n_i, n_j)$ 。　　（2）

（(n_i, n_j) 表 n_i 與 n_j 的最大公因數）

當（2）成立時，可將各模數分解成質因數的積，經化簡可得到（1）的等價一次同餘方程組

$$\begin{cases} N \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ N \equiv r_2 \pmod{a_2} \\ N \equiv r_3 \pmod{a_3} \\ \quad\vdots \\ N \equiv r_m \pmod{a_m} \end{cases}$$

其中，a_i 是 n_i 的因數，而且 $(a_i, a_j) = 1$,$\forall i \neq j$ 。

此時，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$ 的最小公倍數恰好爲 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_m$ ，設 M 。也就是 $M = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_m$ 也是 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$ 的最小公倍數。

（丙）在可解的條件下，找出一組 k_i 滿足：

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 \pmod{a_i} \ ,\forall i = 1, 2, 3, \cdots, m$$

（丁）計算出 N 的最小正整數值

$$N = \left(\sum_{i=1}^{m} r_i k_i \frac{M}{a_i}\right) - pM$$

其中 p 是整數使得 $0 \leq N < M$ 。

至於秦九韶解一次同餘方程組的步驟，與現代方法並無太大的區別。不過，他並未強調步驟（乙）中的（2）是否成立的判斷，但他很可能已經知道該條件。至於步驟（丙），秦九韶則是利用稱之爲『大衍求一術』的機械化算法，以求得 k_i 。對於每一個 k_i ，秦九韶『大衍求一術』的算法原文如下（括號內爲今日之解釋）：

先以右上除右下，（以 G 除 n_i），所得商數（Q_1）與左上一相生（相乘）入左下（加入左下，與此同時把 n_i 改為 G 除 n_i 時的餘數 r_i）。然後乃以右行上下以少除多，遞互除之（輾轉相除，並不斷地用新的餘數去代替舊的餘數），所得商數隨即遞互累乘，歸左行上下，須使右上末後奇一而止（直算至右上角的數目變為 1 停止）。乃驗左上所得，以為乘率（即 k_i）。

設輾轉相除所得的商依次爲 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_n$，而餘數分別爲 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$，並且把左行上下依次算出來得各數，設爲 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$。其中 G 滿足：

$$G \equiv \frac{M}{n_i} \pmod{n_i} \text{ 且 } G < n_i \text{。}$$

秦九韶在利用方格表示時，先將 G 擺在右上，把 n_i 擺在右下。左上放 1，左下放 0。那麼利用上述包含四個數目方格表示整個運算過程，可如下圖（秦九韶的在《數書九章》中給出的算草布式還有一些不同）：

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & G \\ 0 & n_i \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & G \\ b_1 & r_1 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} b_2 & r_2 \\ b_1 & r_1 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} b_2 & r_2 \\ b_3 & r_3 \end{matrix}} \to \cdots \to \boxed{\begin{matrix} b_n & r_n = 1 \\ b_{n-1} & r_{n-1} \end{matrix}}$$

其中

$$\begin{array}{ll}
n_i = GQ_1 + r_1 & b_1 = Q_1 \\
G = r_1 Q_2 + r_2 & b_2 = Q_2 b_1 + 1 \\
r_1 = r_2 Q_3 + r_3 & b_3 = Q_3 b_2 + b_1 \\
r_2 = r_3 Q_4 + r_4 & b_4 = Q_4 b_3 + b_2 \\
r_3 = r_4 Q_5 + r_5 & b_5 = Q_5 b_4 + b_3 \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
r_{n-2} = r_{n-1} Q_n + r_n & b_n = Q_n b_{n-1} + b_{n-2}
\end{array}$$

其中 $r_n = 1$，b_n 即爲所求（$k_i = b_n$）。

由上述各式可以得知

$$(-1)^k r_k = b_k G - c_k n_i$$

其中，$b_0 = 1$,$b_1 = Q_1$,$b_2 = Q_2 b_1 + b_0$,$\cdots$,$b_n = Q_n b_{n-1} + b_{n-2}$

$c_0 = 0$,$c_1 = 1$,$c_2 = Q_2 c_1 + c_0$,$\cdots$,$c_n = Q_n c_{n-1} + c_{n-2}$　　（3）

（註：n 必須是偶數。若 $r_{n-1} = 1$（即 $n-1$ 爲奇數）時，可取 $Q_n = r_{n-2} - 1$，則第 n 次的 $r_n = 1$）

我們不難發現『大衍求一術』與『輾轉相除法』有異曲同工之妙，且讓我們利用熟悉的直式輾轉相除法算算看：

$$
\begin{array}{r|c|c|l}
Q_1 & n_i & G & Q_2 \\
 & GQ_1 & Q_2(c_1n_i-b_1G) & \\
\cline{2-3}
Q_3 & c_1n_i-b_1G & -c_2n_i+b_2G & Q_4 \\
 & Q_3(-c_2n_i+b_2G) & Q_4(c_3n_i-b_3G) & \\
\cline{2-3}
 & c_3n_i-b_3G & -c_4n_i+b_4G & \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & \vdots & \vdots & \\
\cline{2-3}
Q_{n-1} & c_{n-3}n_i-b_{n-3}G & -c_{n-2}n_i+b_{n-2}G & Q_n \\
 & Q_{n-1}(-c_{n-2}n_i+b_{n-2}G) & Q_n(c_{n-1}n_i-b_{n-1}G) & \\
\cline{2-3}
 & c_{n-1}n_i-b_{n-1}G & -c_nn_i+b_nG=1 &
\end{array}
$$

如此一來，請問讀者對（3）及 $(-1)^k r_k = b_kG - c_kn_i$ 的由來是否清楚了呢？

事實上，作者的高中老師所謂的『秦九韶取一術』，聰明的讀者應該已經發現其中的關連性了吧！首先，將所有的商分別算出來（由於只算到 $r_n = 1$，所以最後一術不抄。）將四個方格保留，不過更換內容物（左上、右上均塡商，左下、右下塡 b_k）。從（3）中我們不難理解爲什麼要「先畫（甲）表」？爲什麼運算法則是「該行第一列的値乘上該列前 1 行的値再加上該列前 2 行的値」？又爲什麼要加上「正負正負」？無怪乎作者的高中老師稱他爲『秦九韶取一術』。或許他是在讀懂秦九韶的『大衍取一術』之後所想到的作法。

三、結論

本文所提及的問題，在中國古代是和曆法上的推算『上元積年』有著密切聯繫。遺憾的是，自漢朝末年一直到南宋時代，歷代的各家曆法都只是舉出了『上元積年』的數據，卻都沒有敘述計算的方法。根據現有的材料來看，首先對這一算法進系統敘述的，乃是秦九韶。秦九韶在其所著《數書九章》（公元 1247 年）的第一、二卷中，對這一算法做了系統的介紹，也將此算法應用到推算『上元積年』以外的各種數學問題中去。

在曆法的推算中，如前所述，諸 n_i 是各種天體運行週期（如回歸年、朔望月、…），所以，n_i 不可能都是整數。秦九韶書中也曾對 n_i 的四種不同情況進行了研究，分成元數（正整數）、收數（小數）、通數（分數）、復數（10 的倍數）。遇到後三種情況，秦九韶都是把它們化成第一種情況之後，再進行計算。元朝《授時曆》只取近距，不再推算「上元積年」。明朝頒行的《大統曆》基本上仍是沿用《授時曆》，也廢去了『上元積年』的算法。這在曆法上可以說是一種改進，但從此基於曆法的需要而產生並發展的『大衍求一術』，也逐漸失傳了。直到清中葉，許多數學家鑽研古代數學，方才重新『發現』了這一算法。

這類型的解題方法現今稱爲『中國剩餘定理』，也是目前數論書上唯一的一個掛名『中國』的定理。如此意義重大的定理豈有不讀之理。另一方面，『中國剩餘定理』的內容，對現今高中生而言並非「天書」，若有課餘時間，高中教師可以考慮好好從《孫子算經》的題目介紹到秦九韶的『大衍求一術』。

參考資料

李兆華 (1994).《中國數學史》。台北：文津出版社。
李信明 (1998).《中國數學五千年》。台北：台灣書店。
李儼、杜石然 (1992).《中國古代數學簡史》。台北：九章出版社。
吳文俊 (1987).《秦九韶與《數書九章》》。北京：北京師範大學出版社。
傅溥 (1982).《中國數學發展史》。台北：中央文物供應社。

附錄

課本：

九十二學年龍騰版《高中數學》第一冊第二章

求 2987 與 725 的最大公因數，並將其表成 $2987m+725n$ 的形式，其中 m，$n\in\boldsymbol{Z}$

坊間參考書：

《對話式講義高中數學》第一冊(LS103)第二章 2-1 範例 10

《新指標高中數學》第一冊第二章 2-1 範例 12

段考：

建國中學九十學年度高一第一次段考

2.利用輾轉相除法，找出一組 $(m，n)$： 使得 $3431m+2397n=47$　　$(m，n)=$ __________ 。

大同高中八十九學年度高一第一次段考

15. $a=5723$，$b=4171$，若兩整數 m，n 使 $am+bn=(a，b)$，已知 $0\le n\le 20$，則 $m=$ __________。

一些段考題（不知道那個學校，資料來源：龍騰文化高中數學題庫>自然組數學>題庫系統命題>整數>各校月考）

(1)利用輾轉相除法，求 611 與 235 的最大公因數． (2)試求一組整數(x , y)，使 $611x+235y=(611 , 235)$． (3)將 $\frac{1}{611}+\frac{1}{235}$ 化成最簡分數時，其分母之值爲何?
(1)試用輾轉相除法求$(3569 , 7387)$． (2)承上，利用最大公因數的表現定理，求一組整數解(x , y)使 $3569x+7387y=(3569 , 7387)$．
(1)請用輾轉相除法求 11659 與 5633 的最大公因數 d． (2)承(1)試求一組整數(x , y)使 $11659x+5633y=d$．
(1)求整數 m，n 使$(3298 , 2328)=3298m+2328n$． (2)使$(3298 , 2328)=3298m+2328n$ 之整數 m，n 是否惟一?
$(5321 , 68)=5321m+68n$，求(m , n) 數對
以輾轉相除法求 3431 與 2397 之最大公因數 d；據此求一組整數 m、n 使 $3431m+2397n=d$

以上是我們就手邊目前有的資料所做的簡單說明關於利用輾轉相除法求二次同餘式的例子。在類型的題目可以說是近年來的段考標準例題，所以各家參考書籍均有類似的例子。問過許多同學後也都發現每個人對於此例都有深刻的印象。

新書櫥窗

分享中學數學老師出書的喜悅

台師大數學系 洪萬生教授

書名：數學樂園 -- 從胚騰 Pattern 學好數學
出版商：台北，如何出版社
ISBN 986-136-082-4
出版日期：2006 年 3 月出版
定價：台幣 400 元

林壽福老師即將出書，我非常替他高興。現在，就利用這一篇邀序，來分享他的良師典範與教育界對他的高度肯定。

一般人對於中學數學老師，除了數學課堂的權威表現之外，大概都是一副忙著課後補習的刻板印象。不過，過去一、二十年來，有很多第一線的教育工作者，無論是在實際教學過程、教學研習營或教師輔導團之中，都以相當『啓蒙式』的熱情投入教學研究，爲我們的數學教育現場，增添了多姿多彩的風貌，令人印象非常深刻。

事實上，這也是台灣二十年來，數學教育的理論與實際全面提升的最佳見證。當然，我們不否認這也是過去這一波數學教育改革的成果之一。無論如何，全新的教育思潮之引進，的確帶動了第一線教師的專業發展，從而也爲我們的教育環境，奠定了更深厚的基礎。如果我們打算評估所謂的『國家競爭力』，那麼，第一線教師不斷提升的能力與始終如一的熱情，絕對是不可或缺的參考座標！

在這一本由四件得獎作品改編而成的著作中，我們的確可以領略作者的『現身說法』:「近三年來我努力編一些生活的、趣味的教材（包括數學步道）與教案，同時閱讀數學學習心理學與數學教育等相關文獻，來強化教案的學理依據，並且也研究好的教學方法，希望學生能作有意義的學習。」同時，壽福的專業發展（以這些作品爲例），也印證了數學教師的 PCK 素養的最關緊要。在此，所謂 PCK (pedagogical content knowledge，教學用的學科知識)，是指數學教師如何將他（她）自己所學習的數學知識，轉化成教學現場的學生可以學習的知識。我想，這是過去十幾年來『全球化的』數學教育改革爭議中，各方人馬難得達成的一個珍貴共識。

此外，壽福對於『學習本身』之反思，也帶給我們十分踏實的啓示。他認爲「學習本身是一件有意義、有趣、極迷人的事，如同遊戲或競賽一樣，這會讓孩子的內在受到鼓舞。」如此一來，「有強烈的內在求知動機與顯現在外的行為，就是主動學習，這也是教育改革亟待落實的理念。」

對某些人而言，十年教改彷彿南柯一夢，始終盼不到天光！不過，從壽福這一位『歐吉桑』的樸實無華、但略帶羞澀的文字裡，我們卻看到了一個陽光燦爛的世界！

書籍介紹：《神奇數學 117》

台師大數學系碩士班研究生　陳春廷

原書英文題名：Math Wonders to Inspire Teachers and Students

書名：神奇數學 117

作者：波沙曼提爾（Alfred S. Posamentier）

譯者：葉偉文

出版商：天下遠見出版股份有限公司

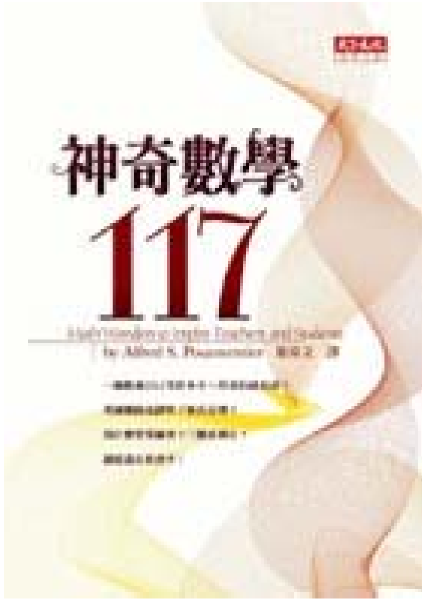
出版日期：2005 年 8 月 26 日

規格：平裝 / 326 頁 / 20.5*14.

普級 / 單色印刷

ISBN 986-417-544-0

定價：新台幣 280 元



第一章　數字之美

第二章　算術妙招

第三章　答案令人驚訝的問題

第四章　代數的趣味

第五章　美妙的幾何

第六章　數學的詭論

第七章　計數與機率

第八章　數學集錦

結　語　給數學老師的叮嚀

本書作者波沙曼提爾（Alfred S. Posamentier）是紐約市立大學市立學院教育研究所所長、數學教育研究所教授。他曾經為數學教師和學生寫過許多書，包括介紹有用的解題技巧，以及分享數學美妙之處。由這本書的英文書名 Math Wonders to Inspire Teachers and Students，即可以看出他基於同樣的理念來著述，而全書更是以「給數學老師的叮嚀」作為結尾。

《神奇數學 117》全書由 117 個問題所構成，波沙曼提爾依照其特性，分成八章來說明，其中幾何、代數、機率等等領域都有觸及。不過，由各領域所佔篇幅看來，全書對算術部分著墨較多，其次為幾何相關主題。在各章之後還附有注釋，說明困難之處或是提供參考資訊給讀者。以下便是這本書內容的簡介。

前兩章的內容，大多是有關如何利用數字進行一些運算，而得到的規律或模式。這對數學科普書的愛好者而言，應該不會有太多的新鮮感，因為在其他類似的數學科普書籍裡面也都看得到，例如：完美數、友誼數（也有人稱為「友善數」）、迴文數等等，或者是像以下這一類的奇妙數字模式：

$$1\times1=1$$
$$11\times11=121$$
$$111\times111=12321$$
$$1111\times1111=1234321$$
$$11111\times11111=123454321$$

不過，就國中數學的教學來看，仍然是有不少的部分，可以當成補充教材，例如：判別數字能否被 7 或 11 或 13 整除的方法與原理，三角形數、正方形數、五邊形數，高斯求 1 到 100 的方法等等。而其中最讓筆者感興趣的是「俄國農夫的土法煉鋼乘法」：俄國農夫對於二位數乘以二位數的計算，使用一種很原始的「土方法」，假設要計算 43×92，就要列出像以下的表。

43	92
21	184
10	368
5	736
2	1472
1	2944

將其中一個數字加倍，另一個數字則要減半，減半的時候如果碰到有餘數就將餘數省略。
將減半那一行的奇數所對應到加倍行中的數值相加就會得到答案
92+184+736+2944＝3956 囉！

接著說明這種算法：

$$
\begin{aligned}
43\times 92 &= (21\times 2+1)(92) = 21\times 184 + 92 = 3956\\
21\times 184 &= (10\times 2+1)(184) = 10\times 368 + 184 = 3864\\
10\times 368 &= (5\times 2+0)(368) = 5\times 368 + 0 = 3680\\
5\times 736 &= (2\times 2+1)(736) = 2\times 1472 + 736 = 3680\\
2\times 1472 &= (1\times 2+0)(1472) = 1\times 2944 + 0 = 2944\\
1\times 2944 &= (0\times 2+1)(2944) = 0 \quad \underline{+2944} = 2944\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3956
\end{aligned}
$$

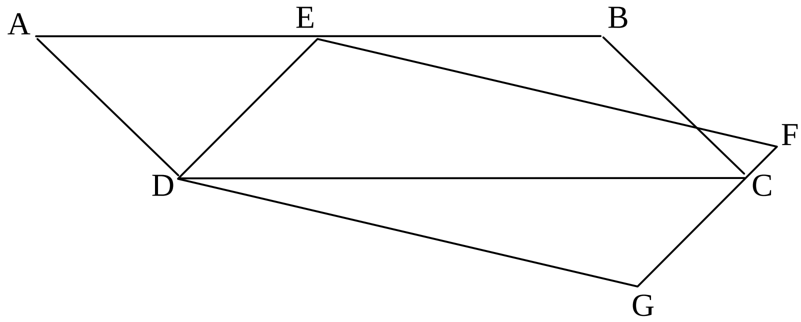
數學不是單純只求快速即可，能夠欣賞到不同的想法，更能體會數學之美！雖然「俄國農夫的土法煉鋼乘法」不是我們所熟悉且迅速的計算方式，但也不失為一個可行的辦法，以這種思考路徑來計算，不也令人佩服其發明者的智慧嗎？

另一個有趣的例子是「滿口歪理」，這是波沙曼提爾引用麥克斯威爾（E. A. Maxwell）的《數學謬論》（Fallacies in Mathematics）的例子：$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$或$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$這樣子的約分對嗎？一般所學到的約分當然是不能夠這麼做，但是，卻又剛剛好「矇到」正確答案咧！原來確實有一些美妙的例子，可以這樣就得到最簡分數。波沙曼提爾隨後就用代數的方式，對其可能性與限制性進行討論，顯然意在激起讀者對於「無趣」的化簡，作進一步的「遐想」吧！

乘數為 21 的速算法：將原來的數加倍，乘 10，再加上原來的數。這種方法只要讀者仔細一想平常如何計算就能明白原理，這只不過是將過程轉換成口訣罷了！把乘數換成 31 的速算法，則是：取原來的數三倍，乘 10，再加上原來的數。要換成 41、51 等等也都可行！筆者猜想國中階段的學生非常愛好這種號稱「速算法」的計算方式，不過，還是要了解其原理再使用才恰當。

第三章「答案令人驚訝的問題」，其內容大多是提醒讀者要掌握正確的題目資訊、勿將問題複雜化，並審慎推論或逆向思考等等。就舉個例子來看看吧！

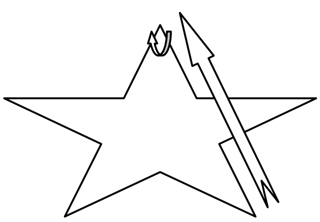
下圖中，E 在線段 AB 上，C 在線段 FG 上。平行四邊形 ABCD 的面積是 20 平方單位，請求出平行四邊形 EFGD 的面積。

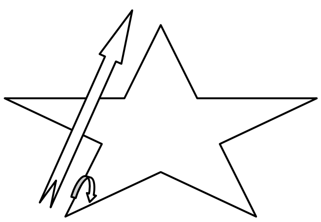


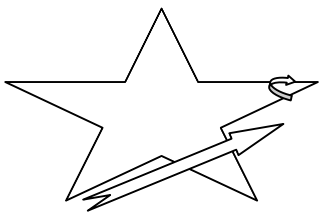
（此圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖）
只要將接線段 EC 連接起來，我們就會發現兩個平行四邊形面積是相等的。

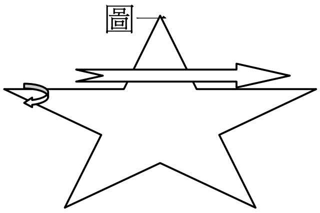
有關第四章「代數的趣味」，筆者認爲值得推薦給讀者的，是其中以代數方法做的證明問題。現在學生大都欠缺自行證明的能力，不妨利用這些題目來挑戰一下。此外，「以幾何觀點看代數」這個部分，運用幾何圖形說明 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$或 $(a+b)^2=a^2+2ab+b$等式子，在現今不少版本的國中教科書裡已有呈現。還有，本書也提供幾個畢氏定理的證明，筆者倒覺得頗具參考價值。

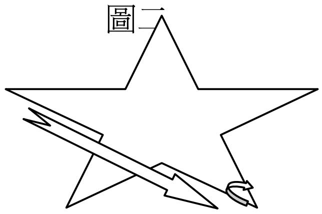
第五章「美妙的幾何」的內容，與其他章相較之下豐富得多，同時，題型與難易度也增加了！波沙曼提爾除了強調幾何在視覺上產生的效果，可以吸引讀者們感到有趣而愉快，也趁機展現了『幾何不變量』的美麗觀念。先看一些初階的東西吧！利用摺紙來說明三角形內角和是 360^0，進而再示範證明敘述。還有，圓面積公式的推演、介紹黃金矩形等等，筆者偏愛的部分是「五角星形的角度」，因爲平時學生都看慣凸多邊形，內角和、外角和都滾瓜爛熟了，若適當地提供這個例子，或許會有不錯的教學效果！下圖的五邊形可以是任意五邊形，而箭頭不妨當成一支筆的筆尖方向，依照下列的旋轉方式，我們不難看出五角星形的五個角度和爲 180^0！

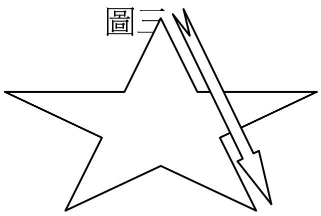

圖一


圖二


圖三


圖四


圖五


圖六

（此圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖）

本書中也提供一些進階題目，有部分甚至是筆者上大學就讀數學系之後才碰到的題目。筆者在此就大致簡介一下。

西瓦定理：通過△ ABC 三個頂點 A、B、C 而與對邊相交於 L、M、N 三點的三條直線交於一點，若且唯若 $\frac{AN}{NB} \bullet \frac{BL}{LC} \bullet \frac{CM}{MA} = 1$。

九點圓定理：任何一個三角形內，三條邊的中點、三個高的垂足，以及三條頂點到垂心線段的中點，同在一個圓上。

拿破崙定理：任何一個三角形，如果沿它的三個邊各畫一個正三角形，新三角形的各頂點分別與原三角形對邊的頂點相連，則三條線會等長。

另外，還有**帕普斯不變量**、**巴斯卡不變量**、**辛普森不變量**等等，書中都有解釋或證明，在此不多說。

篇幅極短的第六章「數學的詭論」，卻是筆者認爲最精采之處！書中列出了數個在學習上常常發生的謬誤，有許多也是自古以來爭論許久的問題，幸好如今都有一套解決方案了！其中包含：對極限概念的掌握、關於無窮及數的謬論、0 當除數的問題等等，其實只需要仔細思考、檢視有無違反數學規則或定理的地方，便可釐清並加深正確的觀念。就舉個例子來看看吧！

$$
\begin{aligned}
S &= 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\
&= (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\
&= 0+0+0+0+\cdots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

這樣對嗎？還是如下列才對？

$$
\begin{aligned}
S &= 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\
&= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots \\
&= 1-0-0-0-\cdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

你也陷入如此的迷思之中嗎？其實，其關鍵在於數列的收斂性質，是否恍然大悟了？

筆者認爲第七章「計數與機率」的內容稍微缺乏創意，幾乎都是耳熟能詳的題目，但是，對於平時較少接觸數學、或是剛入門的讀者而言，還是不錯的安排。例如：「來個交易」是談一個電視節目給獲勝者選擇在三扇門其中一扇，只有一扇門後有獎品，另外兩扇門就是銘謝惠顧，當獲勝者先選了一扇門，主持人會把另外兩扇門打開其中一扇，再問獲勝者要不要來個交易？換不換門？另外，分析一個班級有兩個同學同月同日生的機率大不大？這也是常聽到的機率問題。

第八章「數學集錦」介紹不少著名的定理或是問題：幻方、巴斯卡三角形、費馬最後

定理、七橋問題、四色問題、哥德巴赫猜想等等。筆者猜測作者用意，或許只是增加讀者對於數學經典的認識，而並非要每個人都深入鑽研，畢竟有些是連數學家都尚未解決的問題，即使像「費馬最後定理」已經被證明出來，真正了解的人又有多少？

總之，本書除了少部分的幾何證明稍微困難，需要高中以上程度並且對數學不排斥者（有興趣與耐心）才有能力看懂之外，大致上此書內容頗適合中學程度的學生閱讀，讀者不妨就利用空閒時間來一窺數學之美！不過，本書也包含頗多的數學觀念，作者似乎想給讀者太多的東西，但是，礙於書本篇幅有限，使得有些部分無法完整呈現，在精采之處就停住了，不免有一點可惜！另外，本書譯者將費布納西 (Fibonacci, 1180－1250) 的 *Liber abaci* 稱爲「算盤之書」，但是，事實上該卻與算盤無關，改稱爲「計算書」會更恰當！有興趣的讀者可參閱《HPM 通訊》第五卷第十一期〈八百歲的《計算書》〉一文。