Chapter 5

Vector Analysis

之前談的實函數所得的值是實數，接下來談的函數其取值是有長度與方向的“向量”（vector）。所謂向量分析（vector analysis 或 vector calculus），指的便是這樣的向量函數上的微積分。這樣的問題可以在任意維度的情況探討，不過為了簡單起見，這裡僅探討在二維的平面及三維空間的情況。

5.1. 基本定義與性質

為了避免混淆，我們先定義所謂的 scaler function 和 vector function。這裡所探討函數的定義域可以是實數線、平面、空間中的區域。

如果函數 f 對於定義域上的點代入所得的值為實數，我們便稱 f 為 *scaler function*。若定義域是在實數線上，f 是 scaler function 指的就是大家熟悉的實函數，對於一點 x，我們就用 $f(x)$ 表示其值。當 f 的定義域是平面或空間，f 是 scaler function 指的就是多變數函數。若 f 定義域是在平面上，對於平面上一點 (x,y)，我們就用 $f(x,y)$ 表示其值；而若是定義域為空間中某個區域，對於空間中一點 (x,y,z)，我們就用 $f(x,y,z)$ 表示其值。

Example 5.1.1 (課本 9.4.1)**.** 固定空間中一點 P_0，我們可以考慮定義在此空間的一個 scaler function f 滿足對於任一點 P，$f(P)$ 為 P 到 P_0 的距離。此時若定好坐標，設 P_0 的坐標為 (x_0,y_0,z_0)，則對任一點 (x,y,z)，我們有 $f(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$。

在一般應用來說一個 scaler function 當在定義域上每一點其取值與定義域上的坐標系統無關，我們便稱此 scaler function 在其定義域上的區域定義了一個 *scaler field*。例如某物體上各個位置的溫度就稱為此物體的 *temperature field*；大氣層中各處的氣壓，就稱為其 *pressure field*。 ♯

當函數對於定義域上的點代入所得的是有長度與方向的向量時，我們便稱此函數為 *vector function*。目前在一般的書輯或文獻，會將數值（scaler）用一般字體表示，如 a,b,c；而向量（vector）用粗體表示（為了省去箭頭符號），如 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$。這裡為了對 scaler function

和 vector function 有所區別，我們依然用一般字體表示 scaler function，如 f,g,h；而用粗體表示 vector function，如 $\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}$。

當給定坐標後，我們便可用坐標來表示 vector function。首先提醒在坐標系中一個點有坐標表示法，一個向量也有坐標表示法。本講義，例如在空間坐標系中，我們用 (x,y,z) 來表示一個點的坐標；而用 $[x,y,z]$ 來表示向量。我們選擇用與矩陣一樣的方式表示向量，主要的原因是以後在線性代數中，向量的運算與矩陣的運算是一致的。若 $\mathbf{f}$ 是定義在坐標平面上的某區域的 vector function，對區域中每一點 (x,y)，我們用 $\mathbf{f}(x,y)$ 表示代入 (x,y) 所得的向量。通常在應用上這個向量也會在平面上，我們可將 $\mathbf{f}(x,y)$ 寫成向量 $[f_1(x,y),f_2(x,y)]$。這裡 f_1,f_2 都是定義在此區域的 scaler function。在此情形，為了方便我們會用 $\mathbf{f}=[f_1,f_2]$ 來表示這個 vector function。同理，若 $\mathbf{f}$ 是定義在坐標空間中某區域的 vector function，我們用 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]$ 表示對區域中任一點 (x,y,z)，代入 $\mathbf{f}$ 所得的向量為 $\mathbf{f}(x,y,z)=[f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)]$，其中 f_1,f_2,f_3 皆為 scaler function。

注意，有時候 vector function 用向量坐標表示法有點複雜，我們會改用另外的方式。例如在二維平面的情形，我們會用 $\mathbf{i}$ 來取代向量 $[1,0]$、用 $\mathbf{j}$ 來取代向量 $[0,1]$。也就是坐標表法的 $\mathbf{f}=[f_1,f_2]$ 會用 $\mathbf{f}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}$ 來表示。而在三維空間的情形，我們會分別用 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 來取代向量 $[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]$。也就是坐標表法的 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]$ 會用 $\mathbf{f}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k}$ 來表示。

給定了一個定義在某區域的 vector function，通常我們也就稱此函數在此區域定義了一個 *vector field*（就好像在田裡種了向量）。例如空間中的一個平面上每一點都取單位長且同向的法向量（normal vector），這樣的 vector field 是 constant vector function （每一點上的向量皆相同）所形成的；但若是空間中的曲面，每一點上的切平面的法向量會有變化，所以它的 vector field 能讓我們了解此曲面的彎曲程度。我們還有以下的例子。

Example 5.1.2 (課本 9.4.2)**.** 一個空間中的旋轉體，若利用空間坐標定義旋轉軸上的一點為原點，當旋轉的向量為 $\mathbf{w}$ 時對此物體上任一點 (x,y,z)，我們可以得到在當下的速度向量為外積 $\mathbf{w}\times[x,y,z]$，稱為此旋轉的 *velocity field*。例如 $\mathbf{w}=[0,0,\omega]=\omega\mathbf{k}$，則此 velocity field 為 $\mathbf{f}(x,y,z)=[-\omega y,\omega x,0]=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}$。若將 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)$ 寫成 $[f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)]$ 則各分量的 scaler function 為 $f_1(x,y,z)=-\omega y$, $f_2(x,y,z)=\omega x$, $f_3(x,y,z)=0$。 $\sharp$

Question 5.1. 做課本習題 *9.4.16, 9.4.18.* 在坐標平面上標示夠多的點，並畫出 *vector field* 在這些點的向量。若 $\mathbf{v}(x,y)=[v_1(x,y),v_2(x,y)]$，請分別寫下 *scaler functions* $v_1(x,y),v_2(x,y)$.

在實際情況 vector function 也會有定義在實數的情形（即單變數），例如談論在某些時間點的速度。對於單變數的 vector function，我們可以如單變數的實函數一樣談此 vector function 的連續性以及微分、積分。若一個單變數 vector function $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 的附近有定義且存在一向量 $\mathbf{v}$，當 t 趨近於 t_0 時 $\mathbf{f}(t)-\mathbf{v}$ 的長度趨近於 0，即 $\lim_{t\to t_0}|\mathbf{f}(t)-\mathbf{v}|=0$，我們便稱 $\mathbf{v}$ 為 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 的極限，用 $\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{v}$ 表示。而若 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 是有定義的且 $\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}(t_0)$，

我們便稱 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 是連續的 (continuous at t_0)。如果將此 vector function 用坐標表示 $\mathbf{f}(t)=[f_1(t),f_2(t),f_3(t)]$，此時 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 都是單變數的實函數 (scaler function)，我們會有 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 是連續的就等價於 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 在 t_0 都是連續的。

既然定義了 vector function 的極限，我們也可如實函數一樣定義 vector function 的微分。

Definition 5.1.3. 一個 vector function $\mathbf{f}(t)$，如果極限 $\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}$ 存在，便稱 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 可微 (differentiable)，並以 $\mathbf{f}'(t_0)$ 表示其極限，稱之為 $\mathbf{f}(t)$ 在 t_0 的微分 (derivative)。

從這個定義我們知道若給定坐標，例如 $\mathbf{f}(t)$ 是三維空間的向量，$\mathbf{f}(t)$ 可用坐標寫成 $\mathbf{f}(t)=[f_1(t),f_2(t),f_3(t)]$。我們同樣會有 $\mathbf{f}(t)$ 可微若且唯若 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 皆為可微。此時由於 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 都是一般的實函數，所以利用 Definition 5.1.3 微分的定義，我們有 $\mathbf{f}'(t_0)=[f_1'(t_0),f_2'(t_0),f_3'(t_0)]$。例如若 $\mathbf{f}(t)=[t,t^2+5,-t^3]$，則 $\mathbf{f}'(t_0)=[1,2t_0,-3t_0^2]$。

Question 5.2. 做課本習題 *9.4.22.*

利用微分的定義，我們依然有微分的加法以及乘上係數的性質，亦即當 $\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)$ 為有共同的定義域以及對應域 (即所得的向量可相加) 的 vector functions 以及 $c\in\mathbb{R}$，則

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(t)=\mathbf{f}'(t)+\mathbf{g}'(t),\quad (c\mathbf{f})'(t)=c\mathbf{f}'(t).$$

或許大家會好奇 vector function 有沒有乘法性質 (product rule)? 要注意，由於 vector function 的取值是向量，向量是無法相乘的。不過向量有內積，我們可以考慮兩個 vector functions 取內積，也就是定義 vector function $\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)$ 的內積為 $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)=\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$。因為兩向量內積的結果是實數，所以 $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)$ 會是實函數，也因此可以處理它們的微分。若用坐標表示 $\mathbf{f}(t)=[f_1(t),f_2(t),f_3(t)]$, $\mathbf{g}(t)=[g_1(t),g_2(t),g_3(t)]$，則依定義

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)=f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+f_3(t)g_3(t).$$

由於 $f_i(t),g_i(t)$, $i=1,2,3$ 皆為實函數，所以 $f_i(t)g_i(t)$ 的微分為 $f_i'(t)g_i(t)+f_i(t)g_i'(t)$。由此可得

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t)=\sum_{i=1}^{3}\left(f_i'(t)g_i(t)+f_i(t)g_i'(t)\right)=\sum_{i=1}^{3}f_i'(t)g_i(t)+\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i'(t)=\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t).$$

當 $\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)$ 的取值是三維的向量時，我們也有 $\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)$ 的外積 $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t)=\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)$。注意，此時 $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t)$ 仍為取值是三維向量的 vector function。若用坐標表示 $\mathbf{f}(t)=[f_1(t),f_2(t),f_3(t)]$, $\mathbf{g}(t)=[g_1(t),g_2(t),g_3(t)]$，則依定義

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t)=[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t),f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)].$$

其中每一個分量 $f_i(t)g_j(t)-f_j(t)g_i(t)$ 的微分為

$$f_i'(t)g_j(t)+f_i(t)g_j'(t)-f_j'(t)g_i(t)-f_j(t)g_i'(t)=(f_i'(t)g_j(t)-f_j'(t)g_i(t))+(f_i(t)g_j'(t)-f_j(t)g_i'(t)).$$

所以可推得

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})'(t) &= [f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t)]\times[g_1(t),g_2(t),g_3(t)]+[f_1(t),f_2(t),f_3(t)]\times[g_1'(t),g_2'(t),g_3'(t)]\\ &= (\mathbf{f}'\times\mathbf{g})(t)+(\mathbf{f}\times\mathbf{g}')(t).\end{aligned}$$

Question 5.3. 假設 $\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t),\mathbf{h}(t)$ 皆為定義在實數 $\mathbb{R}$，對應域為三維向量空間 $\mathbb{R}^3$ 的 *differentiable vector functions.* 試寫下 $(\mathbf{h}\cdot(\mathbf{f}\times\mathbf{g}))(t)$ 以及 $(\mathbf{h}\times(\mathbf{f}\times\mathbf{g}))(t)$ 的微分。

我們看以下關於 vector function 內積的微分應用。

Example 5.1.4 (課本 9.4.4)**.** 考慮 vector function $\mathbf{f}(t)$，假設 $\mathbf{f}(t)$ 為可微且對任意 $t\in\mathbb{R}$，$\mathbf{f}(t)$ 的長度皆為定值 c。則由 $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})(t)=c^2$ 取微分得

$$0=(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})'(t)=\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)=2(\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)).$$

也就是說 $\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)=0$。這告訴我們，對於長度固定的 vector function $\mathbf{f}(t)$，在任意的 $t\in\mathbb{R}$，$\mathbf{f}'(t)$ 會與 $\mathbf{f}(t)$ 垂直或是零向量。 $\sharp$

前面談的是單變數的 vector function，對於多變數的 vector function，例如定義域在坐標空間三個變數的 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)$，由於其坐標表法 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]$ 中 f_1,f_2,f_3 都是三個變數的實函數，我們很自然的可以定義 $\mathbf{f}$ 對 x,y,z 的偏微。例如先對 x 的一次偏微，以及先對 y 再對 z 的二次偏微分別為

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}=[\frac{\partial f_1}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x},\frac{\partial f_3}{\partial x}],\quad \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial z\partial y}=[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f_2}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial y}].$$

Example 5.1.5 (課本 9.4.5)**.** 考慮 $\mathbf{f}(x,y)=[a\cos x,a\sin x,y]$，則

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}(x,y)=[-a\sin x,a\cos x,0],\quad \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}(x,y)=[0,0,1],\quad \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial y}(x,y)=[0,0,0].$$

$\sharp$

Question 5.4. 做課本習題 *9.4.24.*