5.2. 曲線與曲面

Vector function 的概念可以幫助我們了解二維平面上的曲線（curve），以及三維空間中的曲線與曲面（surface）。我們將利用前面所提微分的概念探討這些曲線的切線以及曲面的切平面。

5.2.1. Curve. 在坐標平面上的直線可以用方程式來表示，例如 $ax+by+c=0$。不過也可用所謂的參數式表示，例如 $(at+x_0,bt+y_0)$ 就表示通過點 (x_0,y_0) 沿著向量 $[a,b]$ 前後延伸的直線。至於坐標空間中的直線，若要用方程式表示，就必須用兩個平面的交線也就是聯立方程組來表示。不過若用參數式就方便多了，例如 $(at+x_0,bt+y_0,ct+z_0)$ 就是通過點 (x_0,y_0,z_0) 沿著向量 $[a,b,c]$ 的前後延伸直線。一般來說用參數式表示曲線有許多好處，簡單來說，我們可以將曲線的參數式視為是單變數的 vector function。例如前述的直線就可與 $\mathbf{f}(t)=[at+x_0,bt+y_0,ct+z_0]$ 這樣的 vector function 連結。

利用參數式來描繪曲線，能讓我們利用微分求出曲線上任一點的切向量（tangent vector），因而寫下其切線。若 $\mathbf{f}(t)$ 為曲線 C 的參數式。若 C 上一點 P 是在參數 t_0 的地方，即其坐標為 $\mathbf{f}(t_0)$，依切向量的定義，在 P 點的切向量就是極限 $\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}$ 也就是 $\mathbf{f}'(t_0)$。找到切向量後，我們也可寫下此曲線 C 在 P 點的切線參數式為 $\mathbf{f}(t_0)+t\mathbf{f}'(t_0)$。

Example 5.2.1 (課本 9.5.2, 9.5.4)**.** 坐標平面上的橢圓（ellipse）可用方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 來表示，其中 a,b 皆為正實數（如果 $a=b$ 即為圓）。我們可以用參數式 $(a\cos t,b\sin t)$ 來表示。考慮 vector function $\mathbf{f}(t)=[a\cos t,b\sin t]$，由於 $\mathbf{f}'(t)=[-a\sin t,b\cos t]$，若 P 為此橢圓上一點 $(a\cos t_0,b\sin t_0)$，則在 P 點上的切向量為 $[-a\sin t_0,b\cos t_0]$。故通過 P 點的切線參數式為 $(a\cos t_0-at\sin t_0,b\sin t_0+bt\cos t_0)$。例如當 P 點坐標為 $(0,b)$，此時 $t_0=\frac{\pi}{2}$，故在 P 點的切向量為 $[-a\sin\frac{\pi}{2},b\cos\frac{\pi}{2}]=-a[1,0]$，過 P 點的切線參數式為 $(-at,b)$。注意切向量會和參數式的移動方向有關，由於此參數式的選法是沿著橢圓逆時鐘前進，所以在頂點 $(0,b)$ 的水平切向量是沿著 x 軸的負向前進。若考慮另一頂點 $(0,-b)$（此時 $t_0=\frac{3\pi}{2}$），水平切向量就會沿著 x 軸的正向前進。

考慮坐標空間中沿著半徑為 a 的直立圓柱體表面上的螺旋曲線（稱為 circular helix），可用參數式 $(a\cos t,a\sin t,ct)$ 表示，其中 $c>0$ 表示螺旋向上、$c<0$ 表示螺旋向下（$c=0$ 表示只在 xy 平面上繞圈圈）。考慮 vector function $\mathbf{g}(t)=[a\cos t,a\sin t,ct]$，由於 $\mathbf{g}'(t)=[-a\sin t,a\cos t,c]$，在此曲線上任一點 P，若其坐標為 $(a\cos t_0,a\sin t_0,ct_0)$，則在 P 點的切向量為 $[-a\sin t_0,a\cos t_0,c]$ 且切線參數式為 $(a\cos t_0-ta\sin t_0,a\sin t_0+ta\cos t_0,ct_0+ct)$。例如若 P 點坐標為 $(\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{c\pi}{4})$，此時 $t_0=\frac{\pi}{4}$，故在 P 點的切向量為 $[-\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{\sqrt{2}a}{2},c]$。 ♯

Question 5.5. 做課本習題 *9.5.25.* 說明是坐標空間中的怎樣的曲線，並求在 P 點的切線。

知道曲線上各點的切向量還有一個好處就是幫我們求曲線的弧長（arc length）。注意，曲線上兩點 P,Q 之間的弧長指的是沿著曲線從 P 點到 Q 點所要走的實際路徑長，而不是 P,Q 兩點的直線距離。由於曲線是彎曲的，要求其弧長，我們可以利用黎曼和

(Riemann sum) 的概念，先將曲線上 P,Q 兩點之間的路徑分割成好幾等分，每一等分計算其直線距離再加總起來。當分割的越細，這個總和就越接近弧長。所以它的極限（當曲線夠好時此極限存在）就是 P,Q 兩點之間的弧長。現假設此曲線參數式可用 vector function $\mathbf{f}(t)$ 表示，將 P,Q 的參數 t_0,t' 之間分割成 n 等分 $t_0,t_1,\ldots,t_n=t'$。在每一段分割 t_i,t_{i+1} 所得的兩點 $\mathbf{f}(t_i),\mathbf{f}(t_{i+1})$ 其直線距離為 $|\mathbf{f}(t_{i+1})-\mathbf{f}(t_i)|$。若令 $\triangle t=t_{i+1}-t_i$，則 $|\mathbf{f}(t_{i+1})-\mathbf{f}(t_i)|=\dfrac{|\mathbf{f}(t_{i+1})-\mathbf{f}(t_i)|}{t_{i+1}-t_i}\triangle t$。而當 t_{i+1} 趨近於 t_i 時，即 $\triangle t\to 0$，由微分的定義 $\dfrac{|\mathbf{f}(t_{i+1})-\mathbf{f}(t_i)|}{t_{i+1}-t_i}$ 趨近於 $|\mathbf{f}'(t_i)|$，所以利用黎曼和概念可得 P,Q 之間弧長為

$$\int_{t_0}^{t'}|\mathbf{f}'(t)|\,dt=\int_{t_0}^{t'}\sqrt{(\mathbf{f}'\cdot\mathbf{f}')(t)}\,dt.$$

Example 5.2.2. 半徑為 r 的圓其參數式可用 vector function $\mathbf{f}(t)=[r\cos t,r\sin t]$ 表示。若圓上 P,Q 兩點的參數分別為 $t_0,t_0+\theta$（即夾角為 θ），則利用 $\mathbf{f}'(t)=[-r\sin t,r\cos t]$ 以及 $(\mathbf{f}'\cdot\mathbf{f}')(t)=[-r\sin t,r\cos t]\cdot[-r\sin t,r\cos t]=r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t=r^2$，可得 P,Q 之間的圓弧長為

$$\int_{t_0}^{t_0+\theta}\sqrt{(\mathbf{f}'\cdot\mathbf{f}')(t)}\,dt=\int_{t_0}^{t_0+\theta}r\,dt=rt\,\Big|_{t_0}^{t_0+\theta}=r\theta.$$

♯

Question 5.6. 做課本習題 *9.5.30.* 大致上畫圖說明是坐標空間中的怎樣的曲線，並求弧長。

5.2.2. Surface. 在坐標空間中的平面，我們常用方程式 $ax+by+cz=d$ 來表示，不過也可用兩個參數的參數式表示。例如若此平面通過點 x_0,y_0,z_0 且 $[a_1,b_1,c_1],[a_2,b_2,c_2]$ 是此平面上的兩個不平行向量，則可以 u,v 作為參數，用參數式 $(x_0+ua_1+va_2,y_0+ub_1+vb_2,z_0+uc_1+vc_2)$ 來表示此平面。對於空間中的曲面，我們也可用參數式表示。例如在微積分中我們常見的兩個變數的實函數 $z=f(x,y)$ 在坐標空間的圖形所形成的曲面就可用參數式 $(u,v,f(u,v))$ 來表示。從這裡我們可以看出曲線的參數式可以在二維平面以及三維空間（甚至更高維度的情況），只需用到一個參數（通常用 t）來表示。而曲面的參數式只能在三維空間（或更高維度的情況），且需用到兩個參數（通常用 u,v）來表示。

利用參數式來描繪曲線，也能讓我們利用微分求出曲面上任一點的切平面。假設曲面 S 可用 vector function $\mathbf{f}(u,v)$ 表示且 P 為 S 上一點，其參數為 u_0,v_0（即 P 點的坐標為 $\mathbf{f}(u_0,v_0)$）。若我們固定 v_0，則 $\mathbf{f}(u,v_0)$ 變成只有一個參數 u。由前面的討論知 $\mathbf{f}(u,v_0)$ 會是曲面 S 上一條通過 P 點的曲線。再由前面的曲線情形知，此曲線 $\mathbf{f}(u,v_0)$ 在對參數 u 的微分（即偏微 $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}(u,v_0)$）在 u_0 的取值 $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}(u_0,v_0)$，就是此曲線在 P 點的切向量。同理，固定 u_0，我們也可得曲面 S 上一個通過 P 點的曲線，也因此得到另一個切向量 $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$。也就是說 $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}(u_0,v_0)$, $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$ 會是 P 點的切平面上的兩個向量。以後為了方便起見，我們用 $\mathbf{f}_u,\mathbf{f}_v$ 分別表示 $\mathbf{f}$ 對 u,v 的偏微。所以若 $\mathbf{f}_u(u_0,v_0),\mathbf{f}_v(u_0,v_0)$ 不平行（通常當 S 在 P 點附近是平滑的 (smooth) 它們不會平行），就可展成 P 點的切平面也因此可用前面所提方式寫出此平面的參數式。我們也可以利用外積，即 $\mathbf{f}_u\times\mathbf{f}_v$ 找出此平面的法向量 (normal vector)，寫出其方程式。通常我們會用 $\mathbf{N}$ 來表示 $\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v$ 這個 vector function，稱為曲面 S 的 *normal vector field*。

Example 5.2.3 (課本 10.5.2, 10.5.4)**.** 半徑為 r 的球面可用方程式 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 來表示，也可用參數式表示法 $(r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v)$ 其中 $0 \le u < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$。考慮 vector function $\mathbf{f}(u,v) = [r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v]$，其對 u,v 的偏微分別為

$$\mathbf{f}_u(u,v) = [-r\cos v\sin u, r\cos v\cos u, 0], \quad \mathbf{f}_v(u,v) = [-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v].$$

它們的外積，即此球面的 normal vector field 為

$$\mathbf{N}(u,v) = r\cos v[r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v].$$

可以發現球面上任一點 P 上的切平面其法向量會與球心到 P 點所成的向量平行。

例如坐標空間中以原點為圓心，半徑為 4 的球面上一點 P 坐標為 $(\sqrt{2},\sqrt{6},-2\sqrt{2})$。此圓的參數式可用用 vector function $\mathbf{f}(u,v) = [4\cos v\cos u, 4\cos v\sin u, 4\sin v]$ 表示，且 P 點發生於參數 $u=\dfrac{\pi}{3}, v=-\dfrac{\pi}{4}$。可得 P 點的切平面上兩個切向量及法向量分別為

$$\mathbf{f}_u(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}) = [-\sqrt{6},\sqrt{2},0], \quad \mathbf{f}_v(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}) = [\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{2}], \quad \mathbf{N}(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}[\sqrt{2},\sqrt{6},-2\sqrt{2}].$$

可得在 P 點的切平面方程式為 $\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{6}(y-\sqrt{6})-2\sqrt{2}(z+2\sqrt{2})=0$。 ♯

Question 5.7. 做課本習題 *10.5.3.* 說明圖形為何，並說明給定 $u=u_0$, v 為參數所得的曲線為何？反之給定 $v=v_0$, u 為參數所得的曲線為何？再求曲面上各點的法向量。

知道曲面上各點的法向量還有一個好處就是幫我們求曲面面積 (surface area)。當我們要求曲面上某區域的面積時，可利用代表參數式的 vector function $\mathbf{f}(u,v)$ 求其面積。首先找到得到此區域參數 u,v 所在的範圍，設其為 R，也就是說此區域上的點都可用 $\mathbf{f}(u,v)$ 其中 $(u,v)\in R$ 來表示。此時我們也一樣利用黎曼和概念將 R 利用 u,v 的分割將此區域分割成一小塊一小塊的平行四邊形，計算每一小塊的面積再求其總和，當分割的越細就越接近其面積，所以取極限便可得到此區域面積。由於取極限時，每一小塊平行四邊形會接近切平面上的兩個切向量 $\mathbf{f}_u,\mathbf{f}_v$ 所展成的平行四邊形，其面積就是外積 $\mathbf{f}_u\times\mathbf{f}_v$ 也就是法向量 $\mathbf{N}$ 的絕對值，所以我們可以用雙重積分 (double integral) 得到此區域面積為

$$\iint_R |(\mathbf{f}_u\times\mathbf{f}_v)(u,v)|\,du\,dv = \iint_R \sqrt{(\mathbf{N}\cdot\mathbf{N})(u,v)}\,du\,dv.$$

Example 5.2.4 (課本 10.6.4)**.** 半徑為 r 的球面，考慮在 Example 5.2.3 使用的參數式，我們有 normal vector field $\mathbf{N}(u,v) = r\cos v[r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v]$. 內積得

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{N})(u,v) = r^2\cos^2 v(r^2\cos^2 v\cos^2 u + r^2\cos^2 v\sin^2 u + r^2\sin^2 v) = r^4\cos^2 v.$$

球面面積為 $r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}|\cos v|\,du\,dv = 2\pi r^2(\sin(\pi/2)-\sin(-\pi/2)) = 4\pi r^2$. ♯

Question 5.8. 考慮課本習題 *10.5.3* 的曲面在 $0\le u\le 1$, $0\le v\le 2\pi$ 這個區域的面積。