5.3. Grad, Div, Curl

Grad 是將一個 scaler function 轉換成 vector function 的動作，稱為 gradient. Div 是反過來將一個 vector function 轉變成 scaler function，稱為 divergence。而 curl 是將 vector function 轉換成 vector function。這三種轉換在物理以及工程方面有許多的應用，且互相有許多重要的關係。

5.3.1. Gradient. 當 f 是一個多變數的 scaler function，對每一個變數偏微就可得一個 vector function，稱為此函數的 *gradient*。例如在最常見三個變數的情況，scaler function $f(x,y,z)$ 的 gradient 就是 $\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]$。通常我們會用 grad$f$ 或 ∇f 表示。在本講義，我們就用 ∇f（唸成 nabla f）來表示。

接下來我們來探討有關 gradient 的應用，首先最重要的就是它與方向導數的關係。由於方向導數希望推廣偏微的定義，且僅與向量的方向有關（與向量的長度無關），所以通常提方向導數指的是對（長度為 1）單位向量的方向導數。我們考慮三維的情況（二維或更高維定義都是一樣）。在坐標空間中，對於單位向量 $\mathbf{u}=[a,b,c]$，考慮空間中一點 P 設其坐標為 (x_0,y_0,z_0)，則 scaler function $f(x,y,z)$ 在 P 點對 $\mathbf{u}$ 的方向導數（directional derivative）定義為

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at,y_0+bt,z_0+ct)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

從這定義可看出 $f(x,y,z)$ 在在 P 點對 $\mathbf{u}$ 的方向導數就是單變數函數（以 t 為變數）$f(x_0+at,y_0+bt,z_0+ct)$ 對 t 在 $t=0$ 的微分。利用偏微以及 chain rule，可得

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0,z_0) &= a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+c\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\\ &= \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot[a,b,c]\\ &= \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\mathbf{u}. \end{aligned}$$

例如當 $\mathbf{u}=[1,0,0]$，$D_{\mathbf{u}}(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot[1,0,0]=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$。要注意當 $\mathbf{v}$ 不是單位向量時，我們仍用 D_v 這個符號，不過因為僅強調方向，利用 gradient 取方向導數時要除以 $\mathbf{v}$ 的長度。也就是說，若令 $\mathbf{u}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$，則因 $\mathbf{u}$ 為與 $\mathbf{v}$ 同向的單位向量，我們有 $D_{\mathbf{v}}f=D_{\mathbf{u}}f=\nabla f\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\nabla f\cdot\mathbf{v}$。

Question 5.9. 做課本習題 *9.7.40, 9.7.41*（不必畫圖）。

利用 gradient 不只可以很快計算出方向導數，它還有以下重要的性質。

Theorem 5.3.1. 考慮 *scaler function* $f(x,y,z)$，若 f 在 P 點的 *gradient* $\nabla f(P)$ 不是零向量，則 f 在 P 點沿著 $\nabla f(P)$ 的方向增加的速率最快。

這個定理主要是因為依方向導數的定義，$D_{\mathbf{u}}f(P)$ 就就是計算 f 在 P 點沿著 $\mathbf{u}$ 的增減的速率。所以由 $D_{\mathbf{u}}f(P)=\nabla f(P)\cdot\mathbf{u}$ 以及內積的定義，當 $\mathbf{u}$ 與 $\nabla f(P)$ 同向時（即夾角為 0）此內積最大，也因此增加的速率最快。

Example 5.3.2 (課本 9.7.1)**.** 考慮 scaler function $f(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2$，我們要求 $f(x,y,z)$ 在點 $P(2,1,3)$ 的方向導數。首先求 $\nabla f(x,y,z) = [4x,6y,2z]$，故得 $\nabla f(P) = [8,6,6]$。我們可用此向量得到 f 在 P 點對任意向量的方向導數。例如若 $\mathbf{v} = [1,0,-2]$，則由 $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$，可得 $D_{\mathbf{v}}f(P) = \frac{1}{\sqrt{5}}[8,6,6]\cdot[1,0,-2] = \frac{-4}{\sqrt{5}}$。而若沿著 gradient 的方向即考慮 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{34}}[4,3,3]$，則方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(P) = 2\sqrt{34}$ 為最大。 ♯

Theorem 5.3.1 告訴我們一個重要的觀念。如果 scaler function f 是某個區域的 scaler field，即 f 在此區域任一點的取值與在此區域所用的坐標系統無關（例如前面提過物體上各個位置的溫度），故此 scaler field 在各點沿著各方向的增減速率也不會因所用的坐標系不同而不同。既然 f 的 gradient 在各點所得的向量，是在該點使得成長速率最快的方向，所以 gradient 所得的向量也不會與坐標系的選取有關（不同的坐標系雖會得到不同的坐標表示法，不過都是同一個向量）。由此可知一個 scaler filed 的 gradient 會是一個 vector field。例如物體表面各點的溫度所形成的 scaler field 其 gradient 其實是告訴我們各點沿著哪一個向量會使得溫度上升速率最快的 vector filed。

Question 5.10. 做課本習題 *9.7.25*，不必畫圖但請算出在 P 點溫度下降最快的速率為何。

Gradient 另一個重要的應用就是幫助我們找到曲面上的 normal vector field。在前一節，我們探討過若曲面用參數式表示，如何求曲面上各點切平面的法向量。如果曲面可用方程式表示如 $f(x,y,z)=0$，我們就可求 ∇f 來得到各點上的法向量。假設 P 為 $f(x,y,z)=0$ 上的一點，考慮在 P 點上任意的切向量 $\mathbf{u}$，由於曲面上的點皆滿足 $f(x,y,z)=0$，所以 f 對這些切向量的方向導數為 0，也就是說 $\nabla f(P)\cdot\mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$。因此得 $\nabla f(P)$ 若不是零向量，則必與 P 點切平面的向量皆垂直。所以 $\nabla f(P)$ 就是此曲面在 P 點的 normal vector。

Example 5.3.3. 考慮半徑為 r 的球面方程式 $x^2+y^2+z^2-r^2=0$。令 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2$，則 $\nabla f(x,y,z) = [2x,2y,2z]$。因此此球面上任一點 P 若坐標為 (x_0,y_0,z_0)，則在 P 點的切面平面法向量為 $[x_0,y_0,z_0]$。此與 Example 5.2.3 的結果一致。 ♯

給定一個 vector function $\mathbf{F}(x,y,z)$。如果 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 恰好是某個 scaler function $f(x,y,z)$ 的 gradient，即 $\mathbf{F} = \nabla f$，則稱 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 為 *conservative* 且 $f(x,y,z)$ 為其 *potential function*。Conservative vector function 既然來自某個 scaler function 的 gradient 自然有許多重要的性質與應用，這些我們以後會再探討。

Question 5.11. 做課本習題 *9.7.30, 9.7.35*（不必畫圖）。

5.3.2. Divergence. 當 $\mathbf{f}$ 是一個 vector function，其 *divergence* 是將此 vector function 轉換成一個 scaler function。若 $\mathbf{f}$ 的坐標表示為 $\mathbf{f}(x,y,z) = [f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)]$ 則 $\mathbf{f}$ 的 divergence 記為 $\operatorname{div}\mathbf{f}$ 其定義為

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Example 5.3.4. 若 $\mathbf{f}(x,y,z) = [3xz, 2xy, -yz^2]$，則 $\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = 3z+2x-2yz$。 ♯

注意，一般也常用 $\nabla\cdot\mathbf{f}$ 來表示 $\operatorname{div}\mathbf{f}$。這是因為若將 ∇ 視為 $\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]$，且 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]$ 則可將 $\nabla\cdot\mathbf{f}$ 看成像內積一樣寫成 $\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}$. 這個符號表法的好處是，容易聯想到內積，讓我們知道 divergence 與內積很像，將向量轉換成實數；另外也很容易將它和後面會提到的 curl（一般會用外積的符號表示）相對照。不過由於 divergence 不是真的內積，而且此符號（例如 $\nabla\cdot\mathbf{f}$）容易和 scaler function 的 gradient 搞混（例如 ∇f），所以這裡我們僅用 $\operatorname{div}\mathbf{f}$ 來表示 vector function $\mathbf{f}$ 的 divergence.

依照 divergence 的定義，它就是測量一個 vector function 其 x,y,z 各分量分別沿著 x,y,z 方向增減（或進出）速率的總和（所以有測量“分歧”的意義），在物理與幾何上有許多應用。我們來看看一個 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)$ 若是 conservative 且其 potential function 為 $f(x,y,z)$，則它的 divergence $\operatorname{div}\mathbf{f}$ 為何？依定義 $\mathbf{f}=\nabla f=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]$，所以

$$\operatorname{div}\mathbf{f}=\operatorname{div}(\nabla f)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

這個結果稱為 $f(x,y,z)$ 的 *Laplacian*。一般來說對於一個 scaler function $f(x,y,z)$ 其 Laplacian $\operatorname{div}(\nabla f)$ 也常用 $\nabla^2 f$ 來表示（唸成 nabla squared f）。

Question 5.12. 做課本習題 *9.8.2, 9.8.5*。