5.3.3. Curl. 當 $\mathbf{f}$ 是一個 vector function，其 *curl* 是將此 vector function 轉換成另一個 vector function。若 $\mathbf{f}$ 的坐標表示為 $\mathbf{f}(x,y,z) = [f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)]$ 則 $\mathbf{f}$ 的 curl 記為 $\mathrm{curl}\mathbf{f}$ 其定義為

$$\mathrm{curl}\mathbf{f} = \left[\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right].$$

Example 5.3.5. 若 $\mathbf{f}(x,y,z) = [3xz, 2xy, -yz^2]$，則 $\mathrm{curl}\mathbf{f}(x,y,z) = [-z^2, 3x, 2y]$。 $\sharp$

一般也常用 $\nabla\times\mathbf{f}$ 來表示 $\mathrm{div}\mathbf{f}$。這是因為若將 ∇ 視為 $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$，且 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$ 則可將 $\nabla\times\mathbf{f}$ 看成像外積一樣寫成 $\left[\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right]$. 前面提過這個符號表法的好處可以與 divergence 相對照。不過我們仍僅用 $\mathrm{curl}\mathbf{f}$ 來表示 vector function $\mathbf{f}$ 的 curl.

Question 5.13. 做課本習題 *9.9.7, 9.9.8*。

Curl 是捲曲的意思，前面在 Example 5.1.2 我們探討過一個旋轉物體上的 vector field 稱為 velocity field。以下例子我們要求此 velocity field 的 curl，以讓我們大致了解 curl 的意義。

Example 5.3.6 (課本 9.9.2)**.** 在 Example 5.1.2 我們知道一個旋轉體當旋轉向量為 $\mathbf{w} = [0,0,\omega]$ 時，其 velocity field 為 $\mathbf{f}(x,y,z) = [-\omega y, \omega x, 0]$，故得此 velocity field 的 curl 為 $\mathrm{curl}\mathbf{f}(x,y,z) = [0,0,\omega+\omega] = 2\mathbf{w}$。這告訴我們一個旋轉體的 velocity field 其 curl 會是繞軸旋轉向量的兩倍。 $\sharp$、

一個 scaler function $f(x,y,z)$ 的 gradient 會是 vector function $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$。所以我們會有

$$\mathrm{curl}(\nabla f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right].$$

因此若 $f(x,y,z)$ 是連續二階可微（twice continuously differentiable）即二階偏微後仍為連續，此時 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 故 $\mathrm{curl}(\nabla f)$ 會是零向量函數 $\mathbf{0}$。一個 vector function $\mathbf{f}$ 如果 $\mathrm{curl}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ 我們稱其為 *irrotational*。前面提過一個 conservative vector function $\mathbf{f}$ 是由其 potential function f 取 gradient 而得，故由 $\mathrm{curl}\mathbf{f} = \mathrm{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$，知 $\mathbf{f}$ 為 irrotational.

對於一個 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)$，由於其 curl 仍為 vector function，我們可以對其 curl 再取 divergence（這樣得到的是 scaler function）。現假設 $\mathbf{f}$ 的坐標表示為 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$。我們有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{curl}\mathbf{f}) &= \mathrm{div}\left[\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right] \\ &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial y}\end{aligned}$$

同樣的若 $f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)$ 皆為連續二階可微，則 $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\mathbf{f})$ 會是零函數。

我們將以上推導出有關 gradient, divergence 以及 curl 之間的關係，總結成以下定理。

Theorem 5.3.7. 假設 $f(x,y,z)$ 是一個二階連續可微 *scaler function*，則

$$\mathrm{curl}(\nabla f)(x,y,z) = [0,0,0] = \mathbf{0}.$$

若 $\mathbf{f}(x,y,z) = [f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)]$ 其中 $f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)$ 是連續二階可微，則

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\mathbf{f})(x,y,z) = 0.$$

Question 5.14. 證明課本習題 *9.9.14(c)*。

5.4. Line Integral

在微積分談的單變數實函數 $g(x)$ 的積分 $\int_a^b g(x)\,dx$ 是在直線（即實數線）上的積分，所謂“線積分”（line integral）是指在一般（平面或空間中）的曲線上的積分。同樣的，相對於雙重積分，也有所謂在一般曲面上的面積分。這些積分在物理以及工程方面都有重要的應用。這一節我們先談 line integral。

要處理在一個曲線 C 上的線積分首先我們先要找到該曲線的參數式。假設 vector function $\mathbf{r}(t)$ 是曲線 C 的一個參數式，在這裡我們一律假設積分所在的曲線 C 是夠平滑的（piecewise smooth），也就是在有限點外其切向量 $\mathbf{r}'(t)$ 是存在且連續的。在物理上我們要計算一個 force vector function $\mathbf{F}$ 沿著曲線 C 上所做的“功”（work），可以先計算在一小段的功（此時可假設 force 是固定的）再與此段的向量內積，將全段加總就可估計在此曲線所做的功。用黎曼和概念取極限就是所謂 $\mathbf{F}$ 在 C 的 *work integral* $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$。我們也依此定義一個 vector function 在曲線 C 的 line integral。

假設 $\mathbf{f}$ 是一個 vector function，要定義 $\mathbf{f}$ 在沿著曲線 C 的路徑的 line integral，首先先找到 C 的一個參數式 $\mathbf{r}(t)$。和一般積分相同，線積分也是有方向性的，若從 C 的一端 $P = \mathbf{r}(t_0)$ 為起點到另一端 $Q = \mathbf{r}(t_1)$ 為終點，則定義 $\mathbf{f}$ 在此路徑 C 的 line integral $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 為

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt.$$

注意等式左邊是 line integral 的符號，右邊是將之寫成一般單變數（以 t 為變數）函數的積分計算方式。有時我們會把 vector function $\mathbf{f}$ 用坐標形式表示，例如在三維的情況 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$ 此時由於路徑的參數式也可表為 $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$，所以我們也會將 line integral 用以下的（符號）表法：

$$\int_C f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz.$$

要注意因為線積分有方向性，同樣的曲線若起點為 P 終點為 Q 的路徑以 C 表示，則反向路徑即起點為 Q 終點為 P，就以 $-C$ 來表示。也就是說若 C 表示參數式為 $\mathbf{r}(t)$ 起點為 $\mathbf{r}(t_0)$ 終點為 $\mathbf{r}(t_1)$ 的路徑，則

$$\int_{-C} \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = -\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}.$$

Example 5.4.1 (課本 10.1.1, 10.1.2). 我們先看一個二維平面的線積分。考慮 C 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓在第一象限的部分且以逆時鐘的方向行進的路徑，即從 $(1,0)$ 到 $(0,1)$。考慮 vector function $\mathbf{f}(x,y)=[-y,-xy]$，我們要計算 line integral $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$。首先 C 可寫成參數式 $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t)$，其中 $(1,0)=\mathbf{r}(0),(0,1)=\mathbf{r}(\pi/2)$，由於 $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))=[-\sin t,-\cos t\sin t]$，$\mathbf{r}'(t)=[-\sin t,\cos t]$，故依定義

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2}[-\sin t,-\cos t\sin t]\cdot[-\sin t,\cos t]\,dt\\ &= \int_0^{\pi/2}(\sin^2 t-\cos^2 t\sin t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt+\int_0^{\pi/2}(\cos^2 t)\,d(\cos t)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

對於三維空間中的曲線，我們考慮半徑為 1 的圓柱體上的螺旋曲線的路徑 C（參見 Example 5.2.1），其參數式為 $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t,3t)$。若 C 的起點為 $\mathbf{r}(0)=(1,0,0)$ 終點為 $\mathbf{r}(2\pi)=(1,0,6\pi)$。考慮 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)=[z,x,y]$，則

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}[3t,\cos t,\sin t]\cdot[-\sin t,\cos t,3]\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-3t\sin t+\cos^2 t+3\sin t)\,dt=7\pi.\end{aligned}$$

♯

Question 5.15. 做課本習題 *10.1.7*（不必畫圖）。

利用一般積分的性質，我們很容易得到線積分也有與之對應的性質。例如當 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ 皆為 vector functions 且曲線 C 的參數式為 $\mathbf{r}(t)$, 起點為 $\mathbf{r}(t_0)$ 終點為 $\mathbf{r}(t_1)$，則對任意實數 a,b

$$\begin{aligned}\int_C (a\mathbf{f}+b\mathbf{g})(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_0}^{t_1}(a\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))+b\mathbf{g}(\mathbf{r}(t)))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}(a\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)+b\mathbf{g}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t))\,dt\\ &= a\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}+b\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

另外若路徑 C 的參數式為 $\mathbf{r}(t)$, 起點為 $\mathbf{r}(t_0)$ 終點為 $\mathbf{r}(t_2)$，而 $\mathbf{r}(t_1)$ 為路徑上某一點。若令 C_1 為從 $\mathbf{r}(t_0)$ 到 $\mathbf{r}(t_1)$ 這一段路徑，而 C_2 為其餘 $\mathbf{r}(t_1)$ 到 $\mathbf{r}(t_2)$ 這一段，則

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_0}^{t_2}\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Question 5.16. 利用式子 (5.1) 做課本習題 *10.1.10*。

雖然線積分符號 $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 中只用 C 表示路徑，但其計算牽涉到路徑的參數式。不過一個路徑可以有許多參數式表法，會不會因為參數式不同使得線積分算出的值不同呢？接下來就是要說明 line integral 和路徑的參數式選取無關。所以以後計算線積分時，我們可以儘量選取較簡單的參數式來操作。假設路徑 C 的兩個參數式表示法分別為 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}^*(t^*)$ 起

點為 $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}^*(t_0^*)$ 終點為 $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}^*(t_1^*)$。由於它們表示的是同一路徑，可以找到一個變數變換 ϕ 使得 $t^*=\phi(t)$，也就是說 $\phi(t_0)=t_0^*, \phi(t_1)=t_1^*$ 且 $\mathbf{r}^*(t^*)=\mathbf{r}^*(\phi(t))=\mathbf{r}(t)$。因此

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt &= \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{f}(\mathbf{r}^*(\phi(t)))\cdot\mathbf{r}^{*\prime}(\phi(t))\phi'(t)\,dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{f}(\mathbf{r}^*(\phi(t)))\cdot\mathbf{r}^{*\prime}(\phi(t))\,d\phi(t)=\int_{t_0^*}^{t_1^*}\mathbf{f}(\mathbf{r}^*(t^*))\cdot\mathbf{r}^{*\prime}(t^*)\,dt^*.\end{aligned}$$

Example 5.4.2. 在 Example 5.4.1 我們曾經探討 vector function $\mathbf{f}(x,y)=[-y,-xy]$ 對在第一象限的 $\frac{1}{4}$ 單位圓 C 的線積分。若我們將 C 的參數式改用 $\mathbf{r}(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$，則 $\int_C\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 會等於

$$\int_1^0[-\sqrt{1-t^2},-t\sqrt{1-t^2}]\cdot[1,-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}]\,dt=-\int_1^0\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_1^0 t^2\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

和之前的結果是一致的。注意這裡積分是從 $t=1$ 積到 $t=0$ 因為當初 C 的路徑是從點 $(1,0)$ 到點 $(0,1)$。

現考慮以點 $(1,0)$ 為起點，點 $(0,1)$ 為終點的線段 L。雖然 L 和 C 的起點一樣，終點也一樣，但線積分 $\int_C\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 和 $\int_L\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 會不同。事實上若考慮 L 的參數式為 $\mathbf{r}(t)=(1-t,t), 0\le t\le 1$，則

$$\int_L\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_0^1[-t,-t(1-t)]\cdot[-1,1]\,dt=\int_0^1(t-t+t^2)\,dt=\frac{1}{3}.$$

$\sharp$

Question 5.17. 做課本習題 *10.1.2, 10.1.3*。

這個例子告訴我們，雖然用不同的參數式走同樣的路徑線積分會相同；但若兩個不同曲線，雖然起始點一樣，終點也一樣，則沿著這兩種曲線的路徑，其線積分有可能會不同。不過對有些 vector function 它的線積分之只和起點、終點有關，而與路徑無關，這樣的函數就稱為 *path independent*。也就是說若 vector function $\mathbf{f}$ 在一個區域 D 是 path independent，則對於 D 中兩點 P,Q 任意兩個以 P 點為起點, Q 點為終點的路徑 C_1,C_2 皆有 $\int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$.