Example 5.4.8 因為積分的區域是一個圓，其面積大家都很熟悉，所以用雙重積分處理起來比線積分容易。不過若對一般的封閉區域，就不見得如此，反而常利用 Green's Theorem 以線積分來求一個封閉區域的面積。利用黎曼和，我們可用雙重積分算一個封閉區域 R 的面積，即 $\iint_R dxdy$。所以要用 Green's Theorem 以線積分來求 R 的面積，我們必須找到 $\mathbf{f}(x,y)=[f_1(x,y),f_2(x,y)]$ 使得 $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(x,y)=1$。通常使用的是以下三種 $\mathbf{f}_1(x,y)=[0,x]$; $\mathbf{f}_2(x,y)=[-y,0]$; $\mathbf{f}_3(x,y)=\frac{1}{2}[-y,x]$，所以我們有以下以線積分求面積的式子：

$$\iint\limits_R dxdy=\oint_C xdy=\oint_C -ydx=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx.$$

Example 5.4.9 (課本 10.4.2). 我們用線積分來求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積。考慮橢圓參數式 $\mathbf{r}(t)=(a\cos t,b\sin t)$ 利用函數 $\mathbf{f}_3(x,y)=\frac{1}{2}[-y,x]$，可得橢圓面積為

$$\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-b\sin t,a\cos t]\cdot[-a\sin t,b\cos t]\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,dt=ab\pi.$$

♯

Question 5.22. 試以線積分方式計算以 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ 三點為頂點的三角形面積（$\mathbf{f}_1(x,y)=[0,x]$; $\mathbf{f}_2(x,y)=[-y,0]$; $\mathbf{f}_3(x,y)=\frac{1}{2}[-y,x]$ 其中任選一個來做即可）。

當 C 不是封閉路徑且 $\mathbf{f}=[f_1,f_2]$ 在 C 的線積分不好處理時，我們也可以利用 Green's Theorem 幫我們處理。首先我們若能找到另一路徑 C' 使得 C 連接 C' 後形成一封閉路徑。令此封閉路徑之內部為 R 且 R 在此路徑之左側，則由線積分的性質以及 Green's Theorem，我們有

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}+\int_{C'}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_R\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(x,y)\,dxdy$$

（若 R 在路徑右側則需加上負號）。因此若我們會計算 $\int_{C'}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 以及 $\iint\limits_R\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy$，就可得 $\int_C\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 了。

Question 5.23. 考慮 $\mathbf{f}(x,y)=[y^2-7y,2xy+2x]$，以及以原點為圓心的單位圓上半部依逆時鐘方向從 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的路徑 C。試以定積分的形式（不必求值）表示線積分 $\int_C\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$（可參考講義 *Example 5.4.8*）。考慮 C' 為在 x-軸上從 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$ 的路徑，所以 C 接 C' 圍成一個上半圓的封閉區域 R。請計算 $\int_{C'}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 以及 $\iint\limits_R\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy$ 之值，並依此寫下 $\int_C\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ 之值。

5.5. Surface Integral

相對應於線積分是一般單變數函數定積分的推廣，面積分（surface integral）是將雙重積分（定義在平面的積分）推廣到空間中定義在一般的曲面的積分。

要處理在一個曲面 S 上的面積分首先我們先要找到該曲面的參數式。假設 vector function $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 是曲面 S 的一個參數式，在這裡我們一律假設積分

所在的曲面 S 是夠平滑的（piecewise smooth），也就是在有限點外其法向量 $\mathbf{N}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ 是存在且連續的。在物理上我們要計算一個流體的 velocity vector function $\mathbf{F}$ 在曲面 S 上的"流量"（flux），可以先計算在一小段的流量（此時可假設 force 是固定的）再與此段的法向量內積，將全段加總就可估計在此曲面的流量。用黎曼和概念取極限就是所謂 $\mathbf{F}$ 在 S 的 *flux integral* $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$。我們也依此定義一個 vector function 在曲面 S 的 surface integral。

假設 $\mathbf{f}$ 是一個 vector function，要定義 $\mathbf{f}$ 在曲面 S 的 surface integral，首先先找到 S 的一個參數式 $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，其中 (u,v) 在 u,v 平面上的一個區域 R，則定義 $\mathbf{f}$ 在此曲面 S 的 surface integral $\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA$ 為

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA=\iint_R \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv.$$

注意等式左邊是 surface integral 的符號（其中 $\mathbf{n}$ 表示單位法向量），右邊是將之寫成一般雙變數（以 u,v 為變數）函數的雙重積分計算方式。有時我們會把 vector function $\mathbf{f}$ 用坐標形式表示，例如在三維的情況 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]$ 此時由於路徑的參數式也可表為 $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，所以我們也會將 line integral 用以下的（符號）表法：

$$\iint_S (f_1\,dy\,dz+f_2\,dz\,dx+f_3\,dx\,dy).$$

要注意面積分也有方向性，同一個曲面若取相反的法向量，例如 $\mathbf{r}_v\times\mathbf{r}_u$ 所得的面積分會差一個負號。

Example 5.5.1 (課本 10.6.1, 10.6.3)**.** 考慮 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)=[3z^2,6,6xz]$ 在拋物柱面（parabolic cylinder）S 上的面積分，其中 S 的參數式為 $\mathbf{r}(u,v)=(u,u^2,v)$, $0\le u\le 2$, $0\le v\le 3$. 首先我們先計算此曲面的 normal vector field

$$\mathbf{N}(u,v)=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=[1,2u,0]\times[0,0,1]=[2u,-1,0].$$

故

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA=\iint_R [3v^2,6,6uv]\cdot[2u,-1,0]\,du\,dv=\int_0^3\int_0^2(6uv^2-6)\,du\,dv=72.$$

若法向量是使用 $\mathbf{r}_v\times\mathbf{r}_u=[0,0,1]\times[1,2u,0]=[-2u,1,0]$，則面積分為 -72。 $\sharp$

我們再看一個面積分，牽涉的雙重積分上下界不是常數的情況。

Example 5.5.2 (課本 10.6.2)**.** 考慮 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)=[x^2,0,3y^2]$ 在 S 的面積分，其中 S 為平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，我們可以寫下 S 的參數式為 $\mathbf{r}(u,v)=(u,v,1-u-v)$ 其中 $0\le u\le 1-v$, $0\le v\le 1$。由於 S 法向量函數為固定向量 $[1,1,1]$，我們得面積分為

$$\iint_R [u^2,0,3v^2]\cdot[1,1,1]\,du\,dv=\int_0^1\int_0^{1-v}(u^2+3v^2)\,du\,dv=\int_0^1\left(\frac{1}{3}(1-v)^3+3v^2(1-v)\right)dv=\frac{1}{3}.$$

$\sharp$

Question 5.24. 做課本習題 *10.6.4*（注意一般底在 x, y 平面的半徑為 r 且高度為 h 的圓柱面參數式為 $\mathbf{r}(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$，其中 $0 \le u \le 2\pi$，$0 \le v \le h$。不過本題只有 $\frac{1}{4}$ 的圓柱面）。

5.5.1. Divergence Theorem. 在坐標平面的情形，我們可以用 Green's Theorem 將線積分與雙重積分相互轉換；而在坐標空間的情況，我們可以用 Divergence Theorem 將面積分與三重積分相互轉換。

Divergence Theorem 可套用的函數必須是一階連續可微的函數，而積分的區域必須是邊界是由有限多個平滑有向（orientable）曲面所組成的封閉區域。為了方便起見，底下談的函數以及區域都符合這些要求，就不再強調了。現考慮封閉區域 T，其邊界的曲面 S 其法向量永遠朝著 T 的外側。假設 $\mathbf{f}(x,y,z) = [f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)]$ 由於要和三重積分一起探討，所以這裡面積分傳統上是用前面提過 $dydz, dzdx, dxdy$ 的形式表示，即 $\iint\limits_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint\limits_S (f_1\,dy\,dz + f_2\,dz\,dx + f_3\,dx\,dy)$.。Divergence Theorem 是說這個面積分會和 $\mathbf{f}$ 的 divergence $\operatorname{div}\mathbf{f}$ 在 T 這個區域的三重積分是一致的，也就是說

$$\iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA.$$

由於

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z),$$

Divergence Theorem 也常寫成

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_S (f_1\,dy\,dz + f_2\,dz\,dx + f_3\,dx\,dy).$$

Divergence Theorem 的證明與 Green's Theorem 一樣，必需將此區域分割成一塊一塊再利用微積分基本定理處理。我們也不多談了。

Question 5.25. 假設 $\mathbf{f}(x,y,z)$ 為三維空間的一個 *vector field* 且 $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{f}$。利用 *Divergence Theorem* 說明對任意的封閉曲面 S，面積分 $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$ 一定是 0。