6.1.2. 一般週期的情況. 我們可以將 Fourier series 的概念推廣到一般週期的週期函數。假設週期函數 $f(x)$ 的週期 $p=2L$（一般我們習慣用 $2L$ 表示週期而不是直接用 p 的原因是因為使用 $2L$ 在實際應用上其表達方式較方便，且容易與正弦、餘弦函數的週期 2π 相對照）。此時我們可以利用變數變換 $t=\frac{\pi}{L}x$，即 $x=\frac{L}{\pi}t$，也就是說當 t 從 0 到 2π 這段區間，恰為 x 從 0 到 $2L$ 這一個週期。也因此，若我們令 $g(t)=f(\frac{L}{\pi}t)$，此時 $g(t)$ 便是以 t 為變數，週期為 2π 的週期函數了。也因此 $g(t)$ 可表為 Fourier series

$$g(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中當 $n\in\mathbb{N}$ 時

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt. \tag{6.5}$$

當然了，我們要寫回 $f(x)$ 所以將 t 以 $\frac{\pi}{L}x$ 取代得

$$f(x)=g(\frac{\pi}{L}x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x).$$

對於 $a_0,a_1,b_1,\ldots$ 我們也可直接用 $f(x)$ 來求出，所以由 $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt$ 利用變換變數 $t=\frac{\pi}{L}x$ 我們有 $dt=\frac{\pi}{L}dx$ 且 t 從 $-\pi$ 到 π 變成 x 從 $-L$ 到 L。故

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(x)\frac{\pi}{L}\,dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx.$$

同理，當 $n\in\mathbb{N}$ 時利用變換變數 $t=\frac{\pi}{L}x$ 可得

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,dx,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,dx. \tag{6.6}$$

注意，將 $f(x)$ 寫成 Fourier series 當然是要用 x 的函數來表示，所以這裡所用的正弦、餘弦函數一定要用 $\cos\big(\frac{n\pi}{L}x\big)$、$\sin\big(\frac{n\pi}{L}x\big)$（不能用 $\cos nt$、$\sin nt$），不過它們的係數 a_n,b_n，由於都是常數，所以在計算時我們可以用 $g(t)$ 來計算（即式子 (6.5)），也可以用 $f(x)$ 來計算（即式子 (6.6)）。我們看以下的例子。

Example 6.1.4 (課本 Example 11.2.1)**.** 考慮週期為 4 的週期函數

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } -2<x<-1;\\ k, & \text{if } -1>x>1;\\ 0, & \text{if } 1<x<2.\end{cases}$$

由於週期為 $4=2L$，我們得 $L=2$。故 $f(x)$ 的 Fourier series 一定可以寫成以下的形式：

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{2}x+b_n\sin\frac{n\pi}{2}x).$$

我們僅需求出 $a_0,a_1,b_1,\ldots$。可考慮 $g(t)=f(\frac{2}{\pi}t)=\begin{cases}0, & \text{if } -\pi<t<-\pi/2;\\ k, & \text{if } -\pi/2>x>\pi/2;\\ 0, & \text{if } \pi/2<x<\pi.\end{cases}$ 得

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}k\,dt=\frac{k}{2},$$

以及當 $n\in\mathbb{N}$ 時

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}k\cos nt\,dt=\frac{k}{n\pi}\sin nt\,|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2k}{n\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}k\sin nt\,dt=-\frac{k}{n\pi}\cos nt\,|_{-\pi/2}^{\pi/2}=0.$$

由於 $\sin(n\pi/2)=\begin{cases}1, & \text{if } n=1,5,9,\ldots;\\ 0, & \text{if } n=2,4,6,\ldots;\\ -1, & \text{if } n=3,7,11,\ldots.\end{cases}$ 我們得 $f(x)$ 的 Fourier series 為

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x-\frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{2}x+\cdots).$$

我們也可利用式子 (6.6) 計算 $a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}k\,dx=\frac{k}{2}$, 以及當 $n\in\mathbb{N}$ 時

$$a_n=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,dx=\frac{k}{4}\int_{-1}^{1}\cos\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,dx=\frac{k}{4}\int_{-1}^{1}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}x\Big)\,dx.$$

由於 $b_n=0$，$f(x)$ 的 Fourier series 只有 $\cos nx$ 出現，為了強調這種特殊情況，通常我們會稱 $f(x)$ 的 Fourier series 是一個“Fourier cosine series”。 $\sharp$

對於一般正弦波 $E\sin(\omega t)$，我們會說其振幅為 $2E$，角頻率（angular frequency）為 ω。所以若知道角頻率就可知道其週期為 $2\pi/\omega$。當然了，這個正弦函數 $f(t)=E\sin(\omega t)$ 其 Fourier series 就是 $E\sin(\omega t)$。不過若將它變動，其 Fourier series 就會改變。例如一個最大電壓電壓為 E 且角頻率為 ω 的正弦電壓（sinusoidal voltage）經過一個半波整流器（half-wave rectifier）會去除其負值的波，下一個例子便是算經過整流器後所得的週期函數的 Fourier series。

Example 6.1.5 (課本 Example 11.2.3). 考慮週期為 $2\pi/\omega$ 的週期函數

$$u(t)=\begin{cases}0, & \text{if } \frac{-\pi}{\omega}<t<0;\\ E\sin\omega t, & \text{if } 0<t<\frac{\pi}{\omega}.\end{cases}$$

利用 $L=\pi/\omega$，我們有

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(t)\,dt=\frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t\,dt=\frac{E}{\pi}.$$

而當 $n\in\mathbb{N}$ 時，

$$a_n=\frac{\omega E}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t\cos n\omega t\,dt;\quad b_n=\frac{\omega E}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t\sin n\omega t\,dt.$$

這兩個積分都可以用積化和差處理，即

$$\sin\omega t\cos n\omega t=\frac{1}{2}(\sin(1+n)\omega t-\sin(1-n)\omega t);\ \sin\omega t\sin n\omega t=\frac{1}{2}(\cos(1-n)\omega t-\cos(1+n)\omega t).$$

例如 $a_1=\frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\sin 2\omega t\,dt=0$, $b_1=\frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}(1-\cos 2\omega t)\,dt=\frac{E}{2}$. 而當 $n\geq 2$ 時，

$$a_n=\frac{E}{2\pi}(\frac{-\cos(1+n)\pi+1}{1+n}+\frac{-\cos(1-n)\pi+1}{1-n});\quad b_n=0.$$

故得 $u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \cdots)$. $\sharp$

Question 6.4. 做課本習題 *11.2.10*（函數在 $0 < x < 2$ 的取值為 0）。

6.1.3. 一些簡化計算的方法. 有些情況在計算 Fourier series 時可以因函數的特性，直接知道 a_n 或 b_n 的值，而省去每一項都用 Euler formula 的麻煩。

第一種情況就是當 $f(x)$ 是偶函數（even function）的情形，此時由於 $f(-x) = f(x)$ 且常數函數以及餘弦函數都是偶函數，而正弦函數是奇函數，利用偶函數相加減仍為偶函數以及奇函數相加減仍為奇函數，也就是說 $f(x) - a_0 - \sum a_n \cos\frac{n\pi}{L}x = \sum b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ 既是奇函數，也是偶函數。所以推得當 $n \in \mathbb{N}$ 時皆有 $b_n = 0$。也就是說當 $f(x)$ 是偶函數時其 Fourier series 僅有餘弦的部分出現，不會有正弦的部分，所以我們只需求 a_n 即可。例如 Example 6.1.4 中，$f(x)$ 是偶函數，所以僅出現餘弦的部分。我們也在該例中介紹這樣的 Fourier series 稱為 Fourier cosine series。換言之，所有的偶函數其 Fourier series 皆為 Fourier cosine series。反之亦然。另外，這些 a_n 的計算也可以簡化，主要的原因是，當 $g(x)$ 是偶函數時 $\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 2\int_0^L g(x)\,dx$。所以我們有

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

注意由於兩個偶函數相乘仍為偶函數，故 $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ 為偶函數。

當 $f(x)$ 是奇函數（odd function）的情形，此時由於 $f(-x) = -f(x)$ 且正弦函數是奇函數，而常數函數以及餘弦函數都是偶函數，所以我們有 $a_0 = 0$ 且對任意 $n \in \mathbb{N}$ 皆有 $a_n = 0$。也就是說對於奇函數的 Fourier series，我們僅要計算 b_n 的部分即可，其餘 a_n 的部分皆為 0。同理我們也稱這樣的 Fourier series 為 *Fourier sine series*。所有的奇函數其 Fourier series 皆為 Fourier sine series。反之亦然。例如 Example 6.1.2 中，$f(x)$ 是奇函數，我們也確實計算出 $f(x)$ 的 Fourier series 為 Fourier sine series。也就是說，以後對於奇函數的 Fourier series，我們僅要計算 b_n 的值即可。這些 b_n 的計算也可以簡化，主要的原因是兩個奇函數相乘會成為偶函數，所以我們有

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

注意 $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ 為偶函數。

Question 6.5. 做課本習題 *11.2.11*（可用查表得到 $x^2\cos n\pi x$ 的反導函數）。

還有一種情況是當我們知道一個週期函數的 Fourier series，有時對這個函數稍微的變動所得的函數的 Fourier series，可以直接用原來的 Fourier series 求得。最常見的情況是，已知週期為 $p = 2L$ 的週期函數 $f(x) = a_0 + \sum(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$，對於非零實數 c，我們要求 $f(cx)$ 的 Fourier series。在 Question 6.1（課本習題 11.1.4）我們知道此時 $f(cx)$ 的週期為 $2(L/c)$，所以利用前面推導一般週期的方式，我們可以直接將原來 Fourier series 的 x 用 cx 取代，也就是說 $f(cx)$ 的 Fourier series 為

$$f(cx) = a_0 + \sum(a_n\cos\frac{n\pi}{L}cx + b_n\sin\frac{n\pi}{L}cx).$$

不過要注意，並不是所有的情形都可以這樣取代，例如 $f(x^2)$ 它本身已不是週期函數，沒有所謂的 Fourier series。即使將 x^2 代入 Fourier series 其中 $a_n\cos\frac{n\pi}{L}x^2, b_n\sin\frac{n\pi}{L}x^2$ 這些項也不符合 Fourier series 的表示法。

另一種情況是當 $g(x)$ 為與 $f(x)$ 週期相同（皆為 $2L$）的週期函數，則對任意實數 r,s，函數 $rf(x)+sg(x)$ 也是週期為 $2L$ 的週期函數。假設已知 $g(x)$ 的 Fourier series 為 $g(x)=a_0'+\sum(a_n'\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n'\sin\frac{n\pi}{L}x)$ 則利用 $f(x),g(x)$ 的 Fourier series，我們也可以馬上確定 $rf(x)+sg(x)$ 的 Fourier series 為

$$rf(x)+sg(x)=(ra_0+sa_0')+\sum((ra_n+sa_n')\cos\frac{n\pi}{L}x+(rb_n+sb_n')\sin\frac{n\pi}{L}x).$$

這會成立的原因，當然是在於決定 Fourier coefficients 的 Euler formula 以及函數積分的線性性質。要注意，這裡乘在 $f(x),g(x)$ 前的 r,s 必須是常數才可以。例如 $xf(x)$ 就不再是週期函數，也就沒有 Fourier series。即使將 x 乘在 $f(x)$ 的 Fourier series 其中 $a_nx\cos\frac{n\pi}{L}x, b_nx\sin\frac{n\pi}{L}x$ 這些項也不符合 Fourier series 的表示法。

Example 6.1.6. 考慮 Example 6.1.5 的週期函數 $u(t)$ 以及函數 $g(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t$。注意 $g(t)$ 和 $u(t)$ 一樣，也是週期為 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的週期函數。考慮 $f(t)=u(t)-g(t)$，我們有 $f(t)$ 也是週期為 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的週期函數。由於 $g(t)$ 的 Fourier series 就是 $\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t$，我們可以得 $f(t)$ 的 Fourier series 就是 $-\frac{2E}{\pi}(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t+\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\cdots)$. 這是一個 Fourier cosine series，故知 $f(t)$ 會是一個 even function. 事實上，依定義 $f(t)$ 在 $-\frac{\pi}{\omega}$ 和 $\frac{\pi}{\omega}$ 之間的取值為

$$u(t)-\frac{E}{\pi}-\frac{E}{2}\sin\omega t=\begin{cases}-\frac{E}{\pi}-\frac{E}{2}\sin\omega t, & \text{if } \frac{-\pi}{\omega}<t<0;\\ -\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t, & \text{if } 0<t<\frac{\pi}{\omega}.\end{cases}$$

確實符合 $f(-t)=f(t)$。 $\sharp$

Question 6.6. 利用 *Question 6.5*（課本習題 *11.2.11*）的結果，以及上面所提 *Fourier series* 變換週期和線性的性質，做課本習題 *11.2.12*（請不要直接算 *Fourier series*）。

Question 6.7. 做課本習題 *11.2.20*（注意用 x_0 代入 $f(x)$ 的 *Fourier series* 求極限值，要先確認 $f(x)$ 在 x_0 是否連續）。