Chapter 5

Determinant

這一章我們將介紹 determinant (行列式). 對於一個 $n\times n$ matrix, 我們將它的行列式視為其 row vectors 所張成的平行多面體的“有向體積”. 利用這個看法, 我們探討 determinant 應有的性質, 再利用這些性質來得到 determinant 的定義. 這一章中, 我們探討的 $\mathbb{R}^n$ 向量大多以 row vector 來表示, 除非與矩陣乘法有關才會用 column vector 來表示.

5.1. Signed Area in $\mathbb{R}^2$ and Properties of Determinant Function

我們都知道當 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, 令 $\mathbf{u}=(a,b)$, $\mathbf{v}=(c,d)$. 此時 $\det(A)=ad-bc$ 的絕對值會是 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張成的平行四邊形的面積. 而 $\det(A)$ 為正的表示 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 的逆時針方向 (也就是說將 $\mathbf{u}$ 逆時鐘旋轉某個小於 180° 的角度後會與 $\mathbf{v}$ 平行). 反之, $\det(A)$ 為負的表示 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 的順時針方向. 因此 $\det(A)$ 不只告訴我們有關於 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張成的平行四邊形的面積, 且告訴我們 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 之間的方向性. 因此我們稱 $\det(A)$ 為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張成的平行四邊形的 *signed area*.

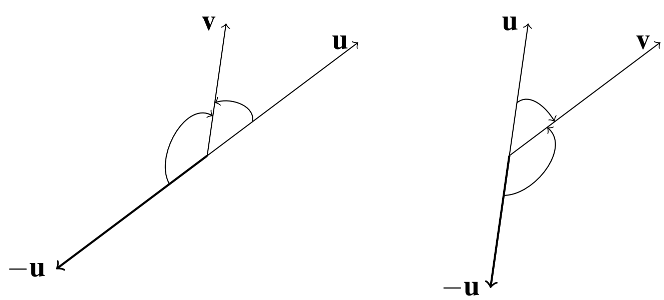
我們希望將此推廣到 $n\times n$ matrix. 也就是說當 $A\in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 令 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^n$ 依序為 A 的 row vectors. 我們希望能定義 $\det(A)$ 使其值為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 所張成的“平行多面體”的 *signed volume*. 也就是說, 希望 $\det(A)$ 的絕對值表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 所張成的“平行多面體”的體積, 而其正負號表示的是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的方向性. 或許大家會疑惑? 當 $n\geq 4$ 時, $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量所張的“平行多面體”是什麼樣子都不知道, 要如何去說它的體積呢? 沒錯, 我們就是希望能延伸 $\mathbb{R}^2$ 的平行四邊形面積的概念到 $\mathbb{R}^3$ 的平行六面體體積. 然後希望能一直延伸下去定義出一般 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量所張的平行多面體的體積. 簡言之, 我們想利用預期一個體積應該符合哪些性質的方法, 來定義出體積. 所以接下來的工作就是列出幾個和 signed area 相關的性質, 希望能定義出 determinant (行列式) 這一個從 $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數 (用 det 表示), 使得它符合這些性質.

首先我們要定義體積, 應該先定義單位體積為何才能確定體積. 在 $\mathbb{R}^2$ 中我們是因為定義了 $(1,0),(0,1)$ 所張的平行四邊形 (其實是正方形) 的面積為 1, 才得到其他平行四邊形的面積. 又 $(1,0)$ 到 $(0,1)$ 確實是逆時鐘轉 $\pi/2$, 依前面的方向性應為正向. 所以 $\det(I_2)=1$ 確實符合我們要求 $(1,0),(0,1)$ 所張的平行四邊形的面積為 1 且為正向的要求. 因此要決定 $\mathbb{R}^n$

中的單位體積, 很自然的我們會定其 standard basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 所張的平行多面體的體積為 1, 且要求 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 這樣的方向性就是正向. 也就是說我們希望 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 所張的平行多面體的 signed volume 為 1, 亦即我們定 $\det(I_n)=1$.

至於一般 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的方向性怎麼定呢? 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為正向, 表示 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 的逆時鐘方向. 此時 $\mathbf{v},\mathbf{u}$ 就是負向, 因為 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{v}$ 的順時鐘方向. 而 2×2 的 determinant $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=ad-bc=-(bc-ad)=-\det\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ 也符合這個性質. 因此我們認為 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 若將其中兩個相鄰向量 $\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_{i+1}$ 變換順序就會改變方向性. 也就是說當 $A\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 若將 A 的相鄰兩個 row 交換所得的矩陣為 A', 則我們要求 $\det(A')=-\det(A)$.

另一個改變 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的方向性的可能就是將其中一個 $\mathbf{v}_i$ 改為 $-\mathbf{v}_i$. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為正向, 則 $-\mathbf{u},\mathbf{v}$ 就是負向. 反之, 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為負向, 則 $-\mathbf{u},\mathbf{v}$ 就是正向. 如下圖所示:



而 2×2 的 determinant

$$\det\begin{bmatrix} -a & -b \\ c & d \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix}=-ad+bc=-(ad-bc)=-\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

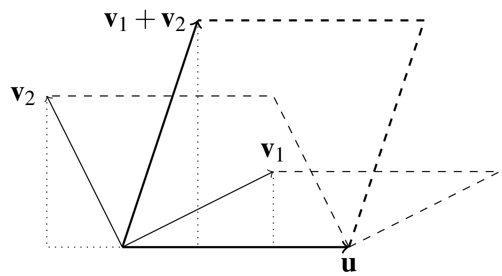
也符合這個性質. 因此我們認為 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 若將其中一個 $\mathbf{v}_i$ 改為 $-\mathbf{v}_i$ 就會改變方向性. 也就是說當 $A\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 若將 A 的某個 row 乘上 -1 所得的矩陣為 A', 則我們要求 $\det(A')=-\det(A)$.

至於體積我們希望有怎樣的性質呢? 首先若 r 為一個正實數, 平行多邊形若有一邊為原來的 r 倍, 我們認為其體積應也會隨之改變為原來的 r 倍. 而 2×2 的 determinant

$$\det\begin{bmatrix} ra & rb \\ c & d \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a & b \\ rc & rd \end{bmatrix}=rad-rbc=r(ad-bc)=r\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

也符合這個性質. 因此我們認為當 $r>0$, $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 若將其中一個 $\mathbf{v}_i$ 改為 $r\mathbf{v}_i$ 就會改變其體積為原來的 r 倍. 也就是說當 $r>0$, 若將 $A\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的某個 row 乘上 r 所得的矩陣為 A', 則我們要求 $\det(A')=r\det(A)$. 而若將 A 的某個 row 乘上 $-r$ 所得的矩陣為 A'', 我們可視為將該 row 先乘上 r 得到 A' 再在 A' 的該 row 乘上 -1, 所以我們要求 $\det(A'')=-\det(A')=-r\det(A)$. 換言之, 不管 r 是正實數或負實數, 若將 A 的某個 row 乘上 r 所得的矩陣為 A', 則我們都要求 $\det(A')=r\det(A)$.

最後如果 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 將其中一個向量 $\mathbf{v}_i$ 拆成兩個向量之和, 即 $\mathbf{v}_i=\mathbf{w}_i+\mathbf{w}'_i$, 則我們認為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_n$ 所張成的平行多面體其有向體積應為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_i,\ldots,\mathbf{v}_n$ 所形成的平行多面體和 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}'_i,\ldots,\mathbf{v}_n$ 所形成的平行多面體的有向體積之和. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中下圖所示:



注意這裡以 $\mathbf{u}$ 為底, $\mathbf{u},\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ 所張的平行四邊形的高為 $\mathbf{u},\mathbf{v}_1$ 所張的平行四邊形和 $\mathbf{u},\mathbf{v}_2$ 所張的平行四邊形的高之和. 而 2×2 的 determinant

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$(a+a')d-(b+b')c=(ad-bc)+(a'd-b'c)=\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} =$$

$$a(d+d')-b(c+c')=(ad-bc)+(ad'-bc')=\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

也符合這個性質. 因此我們要求當 A,B,C 三個 $n\times n$ matrix, 其中 A 的 i-th row 是 B 和 C 的 i-th row 之和, 而 A,B,C 其他各 row 皆相等時, $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

我們將上述討論所希望 determinant 應具有的性質總結如下:

(1) $\det(I_n)=1$.

(2) 若將 $n\times n$ matrix A 某相鄰兩個 row 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=-\det(A)$.

(3) 若將 $n\times n$ matrix A 某個 row 乘上非零實數 r 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=r\det(A)$.

(4) 若 A,B,C 三個 $n\times n$ matrix, 其中 A 的 i-th row 是 B 和 C 的 i-th row 之和, 而 A,B,C 其他各 row 皆相等, 則 $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

注意 (2) 這個性質稱為 determinant 的 *alternating* 性質; 而 (3), (4) 兩個性質, 我們通稱為 determinant 的 *multi-linear* 性質. 千萬不要搞錯, 它並不是說若 $A=B+rC$ 則 $\det(A)=\det(B)+r\det(C)$, 而是說僅有一個 row 寫成線性組合而其他 row 固定不動的情況之下, determinant 可保持該 row 線性組合的關係. 其大致的圖示如下

$$\det\begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_i+r\mathbf{v}_i'- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_n- \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_i- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_n- \end{bmatrix}+r\det\begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_i'- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_n- \end{bmatrix}.$$

Question 5.1. 試利用 *determinant multi-linear* 的性質將 $\det\begin{bmatrix} ra_1+sa_2 & rb_1+sb_2 \\ tc_1+uc_2 & td_1+ud_2 \end{bmatrix}$ 寫成 $\det\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$ 的線性組合.

5.2. Uniqueness of the Determinant Function

上一節中我們給了 det 這個函數預期應該擁有的性質, 但是我們不知道這樣的函數存不存在. 因為或許這些性質要求太多, 會互相抵觸造成符合這些性質的函數根本不存在. 也有可能這些性質要求太少, 以至於有很多函數可以符合這些性質. 這一節中我們將探討, 若符合這些性質的函數存在的話, 那它會是唯一的. 也就是說, 不管怎麼去定這個函數, 如果定出的函數真能符合我們要求的性質, 那它一定就是唯一的那一個.

或許大家會疑惑, 連這個函數存不存在都不知道, 為何要先探討它的唯一性呢? 其實我們在處理數學問題時經常是這樣做的. 例如在解方程式時, 我們都是先假設其解存在, 然後再利用等量公理等方法解出其解可能為那些, 再將這些可能的值代回原方程式看看是否符合, 然後才找到真正的解. 也就是說, 我們不可能將所有的數都代入方程式來找解, 而解方程式的過程是利用若有解的話其解需要具備的性質幫我們縮小範圍找出真正的解來. 現在我們也是一樣, 想先由前一節列出的性質去推導出更多的性質, 然後得到符合這些性質的函數若存在的話僅有一個, 再由此得到這個函數可能的形式, 然後回過來驗證它真的符合我們要的性質.

要注意在本節中, 由於尚未證明 det 是存在的, 所以我們推導出來的性質都是在 det 存在的假設情況才會成立. 從邏輯的角度來看, 這裡推導出來的每個敘述之前都要加上“若 det 存在”這樣的假設條件. 不過以後我們將會證明 det 確實存在, 所以這些敘述事實上是正確的. 因此為了方便起見, 我們都略去“若 det 存在”這樣的假設條件.

首先我們探討 det 在 elementary row operation 之下其取質如何改變. 在 det 要求的性質 (2) 中我們要求當 A 的某相鄰兩個 row 交換其行列式值要變號. 其實這對 A 的任兩個 row 交換也會成立. 這是因為我們可以利用相鄰兩個 row 互換的方法將 A 的 i-th row 和 j-th row 交換. 例如 3-th row 和 6-th row 互換的動作, 我們先從上而下的先將 3-rd 和 4-th row 交換, 然後 4-th 和 5-th row 交換, 這樣一直到將原本的 3-rd row 換到 6-th row 的位置. 此時共做了 $6-3=3$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作圖示如下:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_3- \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_3- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_3- \\ -\mathbf{v}_6- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

接著我們從下而上的將 5-th 和 4-th row 交換 (即原本 6-rd 已到達 4-th row 的位置), 最後將 4-th 和 3-rd row 交換將原本的 6-th row 換到 3-rd row 的位置. 此時共做了 $5-3=2$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作圖示如下:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

在一般的情況, 不失一般性假設 $i<j$, 我們可以先將 A 的 i-th row 和 $i+1$-th row 互換, 接著將 $i+1$-th row 和 $i+2$-th row 互換, 這樣一直下去直到將原本 i-th row 換到 j-th row. 注意此時原本 $i+1$-th row 到 j-th row 其實都只是往上移一個 row, 而我們共做了 $j-i$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作. 接下來從 $j-1$-th row 開始, 先和 $j-2$-th row 交換 (此時原本的 j-th row 已換到 $j-2$-th row), 然後再依序往上用相鄰兩 row 互換的方法將原本的 j-th row 換到 i-th row. 這次由下往上互換的動作從 $j-1$-th row 和 $j-2$-th row 交換一直到 $i+1$-th row 和 i-th row 交換共做了 $(j-1)-i$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作. 所以從上而下再從下而上完成將 i-th row 和 j-th row 互換共做了 $(j-1-i)+(j-i)=2(j-i)+1$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作. 由於每做一次相鄰兩 row 互換 det 會變一次號, 而 $2(j-1)+1$ 為奇數, 故最後 det 還是要變號. 我們推得了以下的性質.

Lemma 5.2.1. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix.* 若將 A 任兩個 *row* 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=-\det(A)$.

回顧一下, 將 A 的 i-th 和 j-th row 交換這樣的 elementary row operation 所得的矩陣其實是將 A 的左邊乘上一個 elementary matrix E. 而 E 就是將 identity matrix I_n 的 i-th 和 j-th row 交換. 所以依 Lemma 5.2.1, 我們有 $\det(E)=-\det(I_n)$. 而 det 的性質 (1) 告訴我們 $\det(I_n)=1$, 因此得 $\det(E)=-1$. 又 Lemma 5.2.1 說將 A 的 i-th 和 j-th row 交換所得的矩陣 EA 其行列式為 $-\det(A)$, 因此若 E 為將 i-th 和 j-th row 交換這樣的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix, 則 $\det(EA)=-\det(A)=\det(E)\det(A)$.

利用 Lemma 5.2.1, 如果 det 這個函數存在的話, 我們可以推得以下簡單的性質.

Lemma 5.2.2. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix* 且 A 中有兩個 *row* 是相等的. 則 $\det(A)=0$.

Proof. 假設 A 的 i-th row 和 j-th row 是相等的. 此時若將 A 的 i-th 和 j-th row 交換所得的矩陣為 A', 則由 Lemma 5.2.1 可得 $\det(A')=-\det(A)$. 但又 $A'=A$, 所以依 det 是一個函數 (之假設) 知 $\det(A)=\det(A')$. 故由 $\det(A)=\det(A')=-\det(A)$ 得證 $\det(A)=0$. □

第二種 elementary row operation 是將矩陣的某個 row 乘上一個非零實數. 這一個 elementary row operation 對行列式的影響其實就是我們要求 det 的性質 (3). 同樣的, 利用這一個 elementary row operation 將 A 的 i-th row 乘上一個非零實數 r 所得的矩陣就是將 A 的左邊乘上一個 elementary matrix E. 而 E 就是將 identity matrix I_n 的 i-th row 乘上 r. 因此依 det 的性質 (1)(3), 我們有此時 $\det(E)=r\det(I_n)=r$. 而性質 (3) 又要求 $\det(EA)=r\det(A)$, 故此時我們依然有 $\det(EA)=r\det(A)=\det(E)\det(A)$. 利用這個性質以及 det 這個函數存在的假設, 我們可以推得以下簡單的性質.

Lemma 5.2.3. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix* 且 A 中有一個 *row* 全為 0. 則 $\det(A)=0$.

Proof. 假設 A 的 i-th row 全為 0. 此時若將 A 的 i-th 乘上 2 所得的矩陣為 A', 則由 det 的性質 (3) 得 $\det(A')=2\det(A)$. 但又 $A'=A$, 所以依 det 是一個函數 (之假設) 知 $\det(A)=\det(A')$. 故由 $\det(A)=\det(A')=2\det(A)$ 得證 $\det(A)=0$. □

第三種 elementary row operation 是將矩陣的某個 row 乘上非零實數 r 加到另一個 row. 現假設 A 為 $n\times n$ matrix 且設 A 的 k-th row 為 $\mathbf{v}_k$, for $k=1,\ldots,n$. 令將 A 的 i-th row 乘上 r 加到 j-th row 所得的矩陣為 A', 則 A' 的 j-th row 為 $\mathbf{v}_j+r\mathbf{v}_i$, 而 A' 的 k-th row 仍為 $\mathbf{v}_k$, for $k\neq j$. 另外令 B 為 $n\times n$ matrix 其 j-th row 為 $\mathbf{v}_i$, 而 k-th row 為 $\mathbf{v}_k$, for $k\neq j$. 則依 det multi-linear 的性質 (即性質 (3) (4)), 我們有 $\det(A')=\det(A)+r\det(B)$. 但 B 的 i-th row 和 j-th row 皆為 $\mathbf{v}_i$, 故由 Lemma 5.2.2 知 $\det(B)=0$. 得知 $\det(A')=\det(A)$, 因此我們有以下的性質.

Lemma 5.2.4. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix.* 若將 A 的 *i-th row* 乘上 r 加到 *j-th row* 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=\det(A)$.

同樣的, 將 A 的 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row 這樣的 elementary row operation 所得的矩陣其實是將 A 的左邊乘上一個 elementary matrix E. 而 E 就是將 identity matrix I_n 的 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row. 所以依 Lemma 5.2.4, 我們有 $\det(E)=\det(I_n)=1$ 且 $\det(EA)=\det(A)$. 因此若 E 為將 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row 這樣的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix, 則 $\det(EA)=\det(A)=\det(E)\det(A)$.

結合上面三種 elementary row operations 對 det 的影響, 我們得到以下重要的定理.

Theorem 5.2.5. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix.* 若 E 為 *elementary matrix,* 則

$$\det(EA)=\det(E)\det(A).$$

Theorem 5.2.5 是 determinant 一個非常重要的性質, 它可以幫我們推導出許多有關於 determinant 的性質. 首先要注意的是三種 elementary row operations 所對應的 elementary matrices 它們的 determinant 皆不為 0, 回顧一下它們的 determinant 分別如下:

(1) 對於兩 row 交換的 elementary matrix E, 我們有 $\det(E)=-1$.

(2) 對於某個 row 乘上非零實數 r 的 elementary matrix E, 我們有 $\det(E)=r$.

(3) 對於某個 row 乘上非零實數 r 加到另一個 row 的 elementary matrix E, 我們有 $\det(E)=1$.

另外, 若 E_1,E_2 為 elementary matrices, 由 Theorem 5.2.5 我們有

$$\det(E_2E_1A)=\det(E_2(E_1A))=\det(E_2)\det(E_1A)=\det(E_2)\det(E_1)\det(A).$$

依數學歸納法可得, 若 $E_1,\ldots,E_k$ 為 elementary matrices, 則

$$\det(E_k\cdots E_1A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(A). \tag{5.1}$$

利用這些 elementary matrices 的 determinant, 我們有以下關於 determinant 的重要性質.

Theorem 5.2.6. 假設 A,B 為 $n\times n$ *matrices.*

(1) A 為 *invertible* 若且唯若 $\det(A)\neq 0$.

(2) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

(3) $\det(A^{\mathrm{t}})=\det(A)$.

Proof. (1) 假設 A 不是 invertible 表示 A 經過 elementary row operations 所得 echelon form A' 其 pivot 的個數會小於 n, 即 $\mathrm{rank}(A)<n$ (參見 Theorem 2.5.2). 因為 A' 的 pivot 的個數小於 n, 所以 A' 的最後一個 row (即 n-th row) 全為 0. 故由 Lemma 5.2.3 知 $\det(A')=0$. 然而我們知存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A'=E_k\cdots E_1A$, 故由式子 (5.1) 知 $\det(A')=\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(A)$. 又 elementary matrices 的 determinants $\det(E_1),\dots,\det(E_k)$ 皆不為 0, 故由 $\det(A')=0$ 得證 $\det(A)=0$. 而若 A 為 invertible, 則 A 可以寫成 elementary matrices 的乘積 (參見 Proposition 2.5.7). 故存在 elementary matrices $E_1\dots E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$. 因此由式子 (5.1) 知 $\det(A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)$. 再由 $\det(E_1),\dots,\det(E_k)$ 皆不為 0 得證 $\det(A)\neq 0$.

(2) 若 A 不是 invertible 由 (1) 我們知 $\det(A)=0$. 又此時因 B 也是 $n\times n$ matrix, 我們有 AB 也不是 invertible (參見 Proposition 2.5.5(3)). 故再由 (1) 知 $\det(AB)=0$, 得證 $\det(AB)=0=\det(A)\det(B)$. 現假設 A 為 invertible. 我們知存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$. 因此由式子 (5.1) 以及 $\det(A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)$ 知

$$\det(AB)=\det(E_k\cdots E_1B)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(B)=\det(A)\det(B).$$

(3) 若 A 不是 invertible 由 (1) 我們知 $\det(A)=0$ 且此時 A^{t} 也不是 invertible (參見 Proposition 2.5.5(2)). 故得證 $\det(A^{\mathrm{t}})=0=\det(A)$. 現假設 A 為 invertible. 我們知存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$ 且 $A^{\mathrm{t}}=E_1^{\mathrm{t}}\cdots E_k^{\mathrm{t}}$ (參見 Proposition 2.2.4). 由於當 E 為兩 row 交換的 elementary matrix 或是將某個 row 乘上非零實數 r 的 elementary matrix 皆有 $E=E^{\mathrm{t}}$, 而當 E 為將 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row 的 elementary matrix 時, E^{t} 為將 j-th row 乘上非零實數 r 加到 i-th row 的 elementary matrix, 故對任意 elementary matrix E 我們皆有 $\det(E)=\det(E^{\mathrm{t}})$. 因此得

$$\det(A^{\mathrm{t}})=\det(E_1^{\mathrm{t}}\cdots E_k^{\mathrm{t}})=\det(E_1^{\mathrm{t}})\cdots\det(E_k^{\mathrm{t}})=\det(E_1)\cdots\det(E_k).$$

最後由於 $n\times n$ matrix 的 determinant 為實數且實數乘法有交換律, 我們有

$$\det(E_1)\cdots\det(E_k)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)=\det(A),$$

得證 $\det(A^{\mathrm{t}})=\det(A)$. □

由於一個矩陣經由 row operation 後取 transpose 就等同於將原矩陣的 transpose 做 column operation. 因此 Theorem 5.2.6 (3) 告訴我們 elementary column operation 對 determinant 的影響和 elementary row operation 對 determinant 的影響是一致的. 換言之, Theorem 5.2.5 也可改寫成以下的形式.

Corollary 5.2.7. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix.* 若 E 為 *elementary matrix,* 則

$$\det(AE)=\det(E)\det(A).$$

接著, 我們證明若 det 這個函數存在, 則它會是唯一的. 這裡的證明有一個很關鍵的觀念大家要注意, 就是本節中所有的性質我們都僅用前一節中對 det 所要求的四個性質推導出來的. 因此不管任何的函數, 只要符合這四個性質就都會符合前面這幾個定理.

Theorem 5.2.8. 最多僅有唯一的函數 $\det:\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 會滿足

(1) $\det(I_n)=1$.

(2) 若將 $n\times n$ *matrix* A 某相鄰兩個 *row* 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=-\det(A)$.

(3) 若將 $n\times n$ *matrix* A 某個 *row* 乘上非零實數 r 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=r\det(A)$.

(4) 若 A,B,C 三個 $n\times n$ *matrix,* 其中 A 的 *i-th row* 是 B 和 C 的 *i-th row* 之和, 而 A,B,C 其他各 *row* 皆相等, 則 $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

Proof. 假設 $\det:\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 和 $\det':\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 皆滿足這四項規則. 考慮 $n\times n$ matrix A, 若 A 不是 invertible, 則由 Theorem 5.2.6 (1) 知 $\det(A)=\det'(A)=0$. 而若 A 為 invertible, 則存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$. 因此由 Theorem 5.2.6 (2) 得 $\det(A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)$ 以及 $\det'(A)=\det'(E_k)\cdots\det'(E_1)$. 最後又由於對任意 elementary matrix E 皆有 $\det(E)=\det'(E)$, 我們證得

$$\det(A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)=\det'(E_k)\cdots\det'(E_1)=\det'(A).$$

因為對任意 $A\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 皆有 $\det(A)=\det'(A)$, 我們證得 det 和 $\det'$ 為相同的函數. □

或許同學會疑惑, 這裡明明已求出了所有 $n\times n$ matrix 的 determinant, 為什麼不是證出了存在性呢? 主要的原因是, 每一個 invertible matrix 寫成 elementary matrix 的乘積其寫法並不唯一. 所以我們無法利用這個方法定出 det 這個函數來, 因為有可能會因為寫成 elementary matrix 乘積的方法不同而得到不同的 determinant. 如此一來就違背函數同一個元素不能有不同取值的要求. 所以也唯有以後我們證明了 det 確實存在後, 才能確保一個 invertible matrix 寫成不同 elementary matrix 的乘積, 仍可求出相同的 determinant.

最後我們介紹如何利用 elementary row operation 求 $n\times n$ matrix 的 determinant. 首先我們先用 elementary row operations 將矩陣變為 echelon form. 而且在化為 echelon form 的過程中只用 (1) 兩 row 交換 (此時 determinant 變號) 以及 (3) 將某個 row 乘上非零實數 r 加到另一個 row (此時 determinant 不會改變), 這兩種 row operations. 若發現 pivot 的個數小於 n, 則我們得矩陣的 determinant 為 0. 而若 pivot 的個數為 n, 則我們利用做了幾次兩 row 交換的 row operation, 就可由 echelon form 的 determinant 得到原矩陣的 determinant (即做了奇數次變號, 偶數次不變號). 然而如何求一個 echelon form 的 determinant 呢? 由於一個 $n\times n$ matrix 的 echelon form 一定是一個 *upper triangular matrix* (上三角矩陣), 也就是說矩陣 diagonal (對角線) 的位置 (即 (i,i)-th entry) 以下的位置皆為 0 (即 $a_{ij}=0$, for $i>j$), 此時下一個定理告訴我們其 determinant 就是 diagonal entries 的乘積.

Proposition 5.2.9. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ *upper triangular matrix* 則 $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}$, 即 $\det(A)$ 為 A 的 *diagonal entries* 的乘積.

Proof. 假設 A 有一個 diagonal entry a_{ii} 為 0, 因為 A 為 upper triangular, 我們知 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數必小於 n. 因此 A 不是 invertible, 得知 $\det(A) = 0$. 而此時 A 的 diagonal entries 的乘積 $a_{11}\cdots a_{ii}\cdots a_{nn}$ 亦為 0, 故得證 $\det(A) = 0 = a_{11}\cdots a_{nn}$.

現若 A 的 diagonal entry 皆不為 0, 此時將 A 的每個 row 做以下的 elementary row operation: 就是對每一個 $i \in \{1,\ldots,n\}$, 將 A 的 i-st row 乘上 $1/a_{ii}$. 令所得的矩陣為 A', 此時我們有 $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}\det(A')$. 因為 A' 的 diagonal entry 皆為 1, 利用 echelon form 化為 reduced echelon form 的方法 (參見 Section 1.3), 我們從最後一個 row (即 n-th row) 開始由下往上的利用該 row 乘上非零實數加到另一個 row 的方法將 A' 化為 I_n. 因為這裡所用的 elementary row operations 都不會影響 determinant, 所以我們有 $\det(A') = \det(I_n) = 1$. 因此得證 $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}\det(A') = a_{11}\cdots a_{nn}$ □

Question 5.2. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ *lower triangular matrix,* 即 A 的 *diagonal* 以上的位置皆為 0 *(*即 $a_{ij} = 0$*, for* $i < j$*).* 試證明 $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}$, 即 $\det(A)$ 為 A 的 *diagonal entries* 的乘積.

Example 5.2.10. 我們利用 elementary row operation 求 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ 的 determinant. 首先將 1-st, 2-nd row 交換得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ (注意此時 determinant 會變號). 接著將 1-st row 分別乘上 $-1, -2$ 加到 3-rd, 4-th row 得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (注意此時 determinant 不會改變). 最後將 2-nd row 分別乘上 $-1, -1$ 加到 3-rd, 4-th row 得 echelon form $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (注意此時 determinant 不會改變). 利用 Proposition 5.2.9 我們知最後所得的 echelon form 其 determinant 為 -6, 又整個化為 echelon form 的過程中僅用了一次兩 row 交換的 row operation, 故 determinant 僅變號一次, 得知

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6.$$

5.3. Determinant of 3×3 Matrix

我們利用上一節有關 determinant 的性質, 寫出 3×3 matrix 的 determinant 可能的形式, 從而證明 3×3 matrix 的 determinant 確實存在. 同時我們利用此 determinant 定義出 $\mathbb{R}^3$ 中三個向量所張成的平行六面體的 *signed volume*.

在 Theorem 5.2.6 (3) 中, 我們知道 $\det(A^t)=\det(A)$. 因此有關 determinant 和 row 有關的性質, 對於 column 也有相對應的性質. 例如我們對 determinant 要求的 (3)(4) 兩個所謂 multi-linear 的性質, 是和 row 有關的, 因此對於 column 也會有 multi-linear 的性質. 我們大致圖示如下 (所有向量寫成 column vector):

$$\det\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i+r\mathbf{v}_i' & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}+r\det\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i' & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}.$$

考慮 3×3 matrix $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. 利用 determinant 對於 column 的 multi-linear 的性質, 由於 A 的 1-st column 可以寫成 $a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_{31}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, 我們有

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=$$
$$a_{11}\det\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}+a_{21}\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}+a_{31}\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

當我們計算 $\det\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 時, 我們可以利用上一節最後所介紹的方法, 用 elementary row operation 將矩陣先化為 echelon form. 由於我們不必動到 1-st row, 事實上我們是將 $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 化為 echelon form. 因此我們有 $\det\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. 同理, 利用 det 的性質, 我們有

$$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

因此依照 determinant 的性質 $\det(A)$ “應該” 定義為

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}-a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}+a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

注意, 這裡我們是根據 det 應有的性質寫下的定義, 它也確實是一個從 $\mathrm{M}_{3\times 3}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數 (不會將同一個矩陣送至不同的值). 不過這並不表示這樣定義出來的函數會符合當初我們要求的四個性質. 所以接下來我們將驗證這樣的定義確實會符合當初要求的四個性質, 也因此證明了 3×3 matrix 的 determinant 確實存在 (且唯一).

首先檢查 $\det(I_3)=1$. 依定義

$$\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=1\det\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-0\det\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+0\det\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=1.$$

故 $\det(I_3)=1$ 成立.

接著檢查相鄰兩個 row 互換後 determinant 會變號. 依定義

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}-a_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+a_{31}\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=a_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}-a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+a_{31}\det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{12}&a_{13}\end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}-a_{31}\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}+a_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

由於 2×2 matrix 的兩個 row 互換後其 determinant 會變號, 我們有

$$\det\begin{bmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad \det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{12}&a_{13}\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}.$$

因此得證

$$\det\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

至於性質 (3), (4) 我們合併檢查, 即檢查 multi-linear 性質. 依定義

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}a_{11}+rb_{11}&a_{12}+rb_{12}&a_{13}+rb_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}&=(a_{11}+rb_{11})\det\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}-\\ a_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12}+rb_{12}&a_{13}+rb_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}&+a_{31}\det\begin{bmatrix}a_{12}+rb_{12}&a_{13}+rb_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

而 2×2 matrix 的 determinant 已知有 multi-linear 的性質, 亦即

$$\det\begin{bmatrix}a_{12}+rb_{12}&a_{13}+rb_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+r\det\begin{bmatrix}b_{12}&b_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{12}+rb_{12}&a_{13}+rb_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}+r\det\begin{bmatrix}b_{12}&b_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}.$$

因此式子 (5.2) 等式右邊可寫成

$$\left(a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right) +$$
$$r\left(b_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right).$$

再利用定義還原回 3×3 matrix determinant 得證

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+rb_{11} & a_{12}+rb_{12} & a_{13}+rb_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

同理對於 2-nd row 和 3-rd row 我們有

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+rb_{21} & a_{22}+rb_{22} & a_{23}+rb_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+rb_{31} & a_{32}+rb_{32} & a_{33}+rb_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

我們利用 2×2 matrix 的 determinant 存在來證明 3×3 matrix 的 determinant 存在, 這樣的方法稱為“降階”的方法. 下一節中, 我們要用降階的方法以及數學歸納法證明任意 $n\times n$ matrix 的 determinant 皆存在. 其實我們這裡定義出 determinant 方法稱為對 1-st column 展開的降階, 我們也可以對 2-nd column 以及 3-rd column 展開. 為了方便起見, 我們有以下的定義.

Definition 5.3.1. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 3×3 matrix. 將 A 的 i-th row 和 j-th column 除去所得的 2×2 matrix, 稱為 A 的 (i,j) *minor matrix*, 用 A_{ij} 表示. 令 $a'_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, 稱為 A 的 (i,j) cofactor.

依此定義, 當初 $\det(A)$ 的定義可以寫成

$$\det(A)=a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{21}+a_{31}a'_{31}.$$

如果我們一開始將 $\det(A)$ 定義為 $\det(A)=a_{12}a'_{12}+a_{22}a'_{22}+a_{32}a'_{32}$, 即對 2-nd column 展開, 得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{32}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

如同前面的證明會發現這個定義仍符合我們對 det 四項要求 (注意 cofactor 的正負號變化, 確保 $\det(I_3)=1$). 因此由 det 的唯一性 (參見 Theorem 5.2.8), 我們知道這樣求出的 determinant 和對 1-st column 展開的結果是一樣的. 同樣的我們也可對 3-rd column 展開得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - a_{23}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + a_{33}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

又因為 $\det(A)=\det(A^t)$, 我們可以將 A 轉置後對 A^t 的 1-st column 展開得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}-a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}+a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{bmatrix}.$$

然而 2×2 matrix 取轉置後其 determinant 也不變, 所以上式等號右邊可改寫為

$$a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}-a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}+a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}.$$

因此得知 $\det(A)=\det(A^t)=a_{11}a'_{11}+a_{12}a'_{12}+a_{13}a'_{13}$, 也就是說 determinant 也可對 1-st row 展開求得. 同理對 2-nd row 和 3-rd row 展開也可求得 determinant. 我們有以下的定理.

Theorem 5.3.2. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 3×3 *matrix.* 令 a'_{ij} 為 A 的 (i,j) *cofactor,* 則

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{21}+a_{31}a'_{31}=a_{12}a'_{12}+a_{22}a'_{22}+a_{32}a'_{32}=a_{13}a'_{13}+a_{23}a'_{23}+a_{33}a'_{33}\\ &= a_{11}a'_{11}+a_{12}a'_{12}+a_{13}a'_{13}=a_{21}a'_{21}+a_{22}a'_{22}+a_{23}a'_{23}=a_{31}a'_{31}+a_{32}a'_{32}+a_{33}a'_{33}\end{aligned}$$

我們得到了 3×3 matrix 的 determinant, 也因此由此可定義出 $\mathbb{R}^3$ 中三個向量所張成的平行六面體的 signed volume. 也就是說若將 $\mathbb{R}^3$ 上的三個向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 寫成 row vectors, 令矩陣 A 為 1-st, 2-nd, 3-rd row 依序為 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的 3×3 matrix, 則 $\det(A)$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 三個向量所張成的平行六面體的 signed volume. 其中 $\det(A)$ 的絕對值, 就是這平行六面體的體積. 而 $\det(A)$ 的正負號告訴我們 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量的方向性. 這裡 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量正反向我們是用所謂的 *right hand rule* (右手定則) 來區分, 意即將右手大拇指指向 $\mathbf{u}$ 的方向, 其餘四個指頭併攏指向 $\mathbf{v}$ 的方向, 若 $\mathbf{w}$ 位於手掌正面的方向則 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為正向, 反之為負向. 例如 $\mathbf{i}=(1,0,0),\mathbf{j}=(0,1,0),\mathbf{k}=(0,0,1)$ 我們定為正向 (因 $\det(I_3)=1>0$). 利用 Section 5.1 我們定的方向性規則, 可以知道 $\det(A)>0$ 時 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量為正向, 而 $\det(A)<0$ 時為負向.

給定 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$, 我們定義 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 的 *cross product* (外積) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 為

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix},\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix},\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\right).$$

要注意, 千萬不要將內積和外積弄混了, 兩個向量之內積是一個實數, 而兩個向量之外積仍為向量. 另外 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ 是不相等的, 除非 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 這是因為兩個 row 交換其 determinant 會變號, 因此依定義 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. 而 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 何時會是 $\mathbf{0}$ 呢? 依定義 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 若且唯若 $\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}=0$, 很容易知道這等同於 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)$ 為 linearly dependent.

現考慮 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{w}=(c_1,c_2,c_3)$ 我們有

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=c_1\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}+c_2\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix}+c_3\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

由於 $\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$ 式子 (5.3) 的右式又等同於將 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 對 3-rd row 展開的 determinant, 故得

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -\mathbf{u}- \\ -\mathbf{v}- \\ -\mathbf{w}- \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

也就是說 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量所張成的平行六面體的 signed volume.

特別的, 當 $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ 或 $\mathbf{w}=\mathbf{v}$ 時, 由於 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 row vector 所形成的矩陣有兩個 row 相同, 所以其 determinant 為 0 (Lemma 5.2.2). 因此由式子 (5.4) 知 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$. 也就是說當 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為 linearly independent 時, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 同時會和 $\mathbf{u}$ 以及和 $\mathbf{v}$ 垂直. 而當 $\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, 我們有 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. 也就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的 signed volume 為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. 考慮 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體以 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形為底, 此時由於 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 以及和 $\mathbf{v}$ 垂直, 我們得 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ 就是此平行六面體的高. 因此由 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的體積 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$ 為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積乘上高 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, 得 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. 另外由於 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的 signed volume 為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 > 0$, 我們知 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 利用右手定則為正向. 最後我們將外積的性質歸納如下.

Theorem 5.3.3. 給定 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. 則 $\mathbf{u}\times\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ 若且唯若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為 *linearly independent.* 此時 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 的長度為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積, 且 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 同時與 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 垂直, 又 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 利用右手定則為正向.

又假設 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}$, 則 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\neq 0$ 若且唯若 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 *linearly independent.* 此時 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量所張成的平行六面體的 *signed volume.*

5.4. Existence of the Determinant Function

在上一節中, 我們利用降階的方法以及 2×2 matrix 的 determinant 的存在性建構了 3×3 matrix 的 determinant, 因而得到其存在性. 接著我們可利用 3×3 matrix 的 determinant 存在性得到 4×4 matrix 的 determinant 的存在性, 然後一直下去. 在本節中, 我們就是要用數學歸納法證明一般 $n\times n$ matrix 的 determinant 皆存在.

首先我們將 Definition 5.3.1 的定義推廣到一般的情形.

Definition 5.4.1. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ matrix. 將 A 的 i-th row 和 j-th column 除去所得的 $(n-1)\times(n-1)$ matrix, 稱為 A 的 (i,j) *minor matrix*, 用 A_{ij} 表示. 當 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 存在時, 令 $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, 稱為 A 的 (i,j) cofactor.

現利用數學歸納法假設 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 存在, 對於 $n\times n$ matrix $A=[a_{ij}]$, 固定 $k\in\{1,\ldots,n\}$, 我們考慮 A 對 k-th column 展開, 定義

$$\det(A) = a_{1k}a'_{1k} + a_{2k}a'_{2k} + \cdots + a_{nk}a'_{nk}.$$

我們要利用 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 符合 determinant 所要求的四個性質來證明這樣定出 $n\times n$ matrix 的 determinant 也會符合這四個性質.

首先證明 $\det(I_n)=1$. 由於 I_n 的 k-th column 為 $\mathbf{e}_k$, 僅有在 k-th entry 為 1, 其餘位置為 0. 也就是說若令 $A=[a_{ij}]=I_n$, 則 $a_{ik}=0$ for $i\neq k$ 且 $a_{kk}=1$. 因此依定義我們有 $\det(I_n)=a_{kk}a'_{kk}=a'_{kk}$. 然而 $A=I_n$ 在 (k,k) 的 minor matrix 為 I_{n-1}, 因此得 $A=I_n$ 的 (k,k) cofactor 為 $a'_{kk}=(-1)^{k+k}\det(I_{n-1})=\det(I_{n-1})$. 但依 induction 的假設, $\det(I_{n-1})=1$, 故知 $a'_{kk}=1$, 得證 $\det(I_n)=1$.

接著檢查相鄰兩個 row 互換後 determinant 會變號. 假設 $A=[a_{ij}]$, 固定 $l\in\{1,\ldots,n-1\}$, 假設將 A 的 l-th row 和 $l+1$-th row 交換所得的矩陣為 $B=[b_{ij}]$. 也就是說當 $i\neq l,l+1$ 時, $b_{ij}=a_{ij}$ 而 $b_{lj}=a_{l+1\,j}$, $b_{l+1\,j}=a_{lj}$. 因而我們有當 $i<l$ 時, B 的 (i,k) minor matrix B_{ik} 就是將 A 的 (i,k) minor matrix A_{ik} 相鄰的 $l-1$-th, l-th 兩個 row 交換 (此時依歸納假設 $\det(B_{ik})=-\det(A_{ik})$). 而當 $i>l+1$ 時, B_{ik} 就是將 A_{ik} 相鄰的 l-th, $l+1$-th 兩個 row 交換 (此時依歸納假設 $\det(B_{ik})=-\det(A_{ik})$). 又 B_{lk} 就是 $A_{l+1\,k}$ 且 $B_{l+1\,k}$ 就是 A_{lk}. 因此我們有 B 的 (i,k) cofactor b'_{ik} 為

$$(-1)^{i+k}\det(B_{ik})=\begin{cases}(-1)^{i+k}(-\det(A_{ik}))=-a'_{ik}, & \text{if } i\neq l \text{ and } i\neq l+1;\\ (-1)^{l+k}\det(A_{l+1\,k})=-a'_{l+1\,k}, & \text{if } i=l;\\ (-1)^{i+1+k}\det(A_{lk})=-a'_{lk}, & \text{if } i=l+1;\end{cases}$$

由此得證

$$\begin{array}{rcccccccccc}\det(B) & = & b_{1k}b'_{1k} & +\cdots+ & b_{lk}b'_{lk} & + & b_{l+1\,k}b'_{l+1\,k} & +\cdots+ & b_{nk}b'_{nk}\\ & = & a_{1k}(-a'_{1k}) & +\cdots+ & a_{l+1\,k}(-a'_{l+1\,k}) & + & a_{lk}(-a'_{lk}) & +\cdots+ & a_{nk}(-a'_{nk})\\ & = & -\det(A) & & & & & & \end{array}$$

至於性質 (3), (4) 我們合併檢查, 即檢查 multi-linear 性質. 固定 $l\in\{1,\ldots,n-1\}$ 以及 $r\in\mathbb{R}$. 假設 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$ 為 $n\times n$ matrices 滿足當 $i\neq l$ 時 $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$ 而 $a_{lj}=b_{lj}+rc_{lj}$. 當 $i<l$ 時, A 的 (i,k) minor matrix A_{ik} 的 $l-1$-th row 就是 B_{ik} 的 $l-1$-th row 加上 r 倍的 C_{ik} 的 $l-1$-th row (此時依歸納假設 $\det(A_{ik})=\det(B_{ik})+r\det(C_{ik})$). 而當 $i>l+1$ 時, A_{ik} 的 l-th row 就是 B_{ik} 的 l-th row 加上 r 倍的 C_{ik} 的 l-th row (此時依歸納假設 $\det(A_{ik})=\det(B_{ik})+r\det(C_{ik})$). 又 A_{lk} 等於 B_{lk} 且等於 C_{lk}. 因此我們有 A 的 (i,k) cofactor a'_{ik} 為

$$(-1)^{i+k}\det(A_{ik})=\begin{cases}(-1)^{i+k}(\det(B_{ik})+r\det(B_{ik})=b'_{ik}+rc'_{ik}, & \text{if } i\neq l;\\ (-1)^{l+k}\det(B_{lk})=(-1)^{l+k}\det(C_{lk})=b'_{lk}=c'_{lk}, & \text{if } i=l;\end{cases}$$

由此得證

$$\begin{array}{rcccccccc}\det(A) & = & a_{1k}a'_{1k} & +\cdots+ & a_{lk}a'_{lk} & +\cdots+ & a_{nk}a'_{nk}\\ & = & b_{1k}(b'_{1k}+rc'_{1k}) & +\cdots+ & (b_{lk}+rc_{lk})b'_{lk} & +\cdots+ & b_{nk}(b'_{nk}+rc'_{nk})\\ & = & b_{1k}b'_{1k}+rc_{1k}c'_{1k} & +\cdots+ & b_{lk}b'_{lk}+rc_{lk}c'_{lk} & +\cdots+ & b_{nk}b'_{nk}+rc_{nk}c'_{nk}\\ & = & \det(B)+r\det(C). & & & & \end{array}$$

我們證得了 det 的存在性, 再加上 Theorem 5.2.8 的唯一性, 我們有以下的結論.

Theorem 5.4.2. 存在唯一的函數 $\det: \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 滿足

(1) $\det(I_n)=1$.

(2) 若將 $n\times n$ *matrix* A 某相鄰兩個 *row* 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=-\det(A)$.

(3) 若將 $n\times n$ *matrix* A 某個 *row* 乘上非零實數 r 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=r\det(A)$.

(4) 若 A,B,C 三個 $n\times n$ *matrix*, 其中 A 的 *i-th row* 是 B 和 C 的 *i-th row* 之和, 而 A,B,C 其他各 *row* 皆相等, 則 $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

由於我們證得了對任意的 column 展開所得的 determinant 皆符合上述四項性質, 因此由唯一性得到對任意 column 展開所得的 determinant 之值皆會相同. 另外和 3×3 的情形相同, 由於 $\det(A^{t})=\det(A)$, 我們也得到對任意 row 展開所得的 determinant 之值皆會相同. 因此我們有以下的結果.

Theorem 5.4.3. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ *matrix.* 令 a'_{ij} 為 A 的 (i,j) *cofactor,* 則對任意 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 皆有 $\det(A)=a_{1k}a'_{1k}+a_{2k}a'_{2k}+\cdots+a_{nk}a'_{nk}=a_{k1}a'_{k1}+a_{k2}a'_{k2}+\cdots+a_{kn}a'_{kn}$.

Question 5.3. 對於 $n\times n$ *matrix* $A=[a_{ij}]$ 考慮 A 的 *diagonal entry* 展開, 即考慮

$$a_{11}a'_{11}+a_{22}a'_{22}+\cdots+a_{nn}a'_{nn}.$$

試問這樣的展開方法會符合我們要求 *determinant* 的四項規則的哪幾項?

雖然我們利用 elementary row operations 的方法證明了 determinant 的唯一性, 又用降階的方法證明了 determinant 的存在性, 不過在計算 determinant 時, 這兩種方法都可混用. 一般來說用 row operation 或 column operation 來求 determinant 較快, 不過若發現有的 row 或 column 僅有一個不是 0 的 entry, 則對該 row 或 column 降階, 也可幫助我們較快算出 determinant. 我們看以下的例子.

Example 5.4.4. 我們求 $A=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\4&-2&7&8\end{bmatrix}$ 的 determinant. 首先觀察 A 的 1-st column 僅有兩個 entry 不為 0, 所以利用 1-st row 乘上 -2 加到 4-th row 得 $B=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$ (此時 $\det(A)=\det(B)$). 現因 B 的 1-st column 僅有一個非 0 entry, 我們對 1-st column 降階展開得 $\det(B)=2\det(C)$ 其中 C 為 B 的 $(1,1)$ minor matrix, 即 $C=\begin{bmatrix}2&1&2\\5&3&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$. 接著將 C 的 2-nd column 乘上 2 加到 3-rd column 得 $D=\begin{bmatrix}2&1&4\\5&3&9\\0&1&0\end{bmatrix}$ (此時 $\det(C)=\det(D)$). 最後對 D 的 3-rd row 展開得 $\det(D)=(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}2&4\\5&9\end{bmatrix}=2$. 故知 $\det(A)=\det(B)=2\det(C)=2\det(D)=4$.

5.5. Cramer's Rule and Adjoint Matrix

Determinant 不只可以幫助我們計算平行多面體的有向體積, 其實它也可以幫助我們解聯立方程組以及找到 invertible matrix 的反矩陣. 在這一節中, 由於和矩陣乘法有關, 所以所有向量皆用 column vector 表示.

首先考慮 $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ 對於 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 令 $\mathbf{a}_j$ 表示 A 的 j-th column. 現對於 $\mathbb{R}^n$ 的一個 vector $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, 對於任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, 考慮 C_k 為將 identity matrix I_n 的 k-th column 用 $\mathbf{c}$ 取代的 $n \times n$ matrix. 亦即當 $j \neq k$ 時, C_k 的 j-th column 為 $\mathbf{e}_j$, 而 C_k 的 k-th column 為 $\mathbf{c}$. 現考慮 AC_k, 依矩陣乘法的定義, 我們有

$$AC_k = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & c_1 & & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \vdots & \cdots & \mathbf{e}_n \\ | & & c_n & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

也就是說當 $j \neq k$ 時, AC_k 的 j-th column 為 $\mathbf{a}_j$, 而 AC_k 的 k-th column 為 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$. 現對於 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 若 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 亦即

$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \quad (5.6)$$

因此若令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ matrix, 即

$$B_k = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix},$$

則結合式子 (5.5) (5.6), 我們有 $AC_k = B_k$. 因此由 determinant 的乘法性質 (Theorem 5.2.6 (2)), 得 $\det(A)\det(C_k) = \det(B_k)$. 然而對 C_k 的 k-th row 展開, 我們有 $\det(C_k) = (-1)^{k+k}c_k\det(I_{n-1}) = c_k$. 因此得證以下之定理.

Theorem 5.5.1. 假設 A 為 $n \times n$ *matrix* 且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 為 *column vector.* 對於 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 *k-th column* 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ *matrix.* 若 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 則 $c_k\det(A) = \det(B_k)$.

我們可以利用 Theorem 5.5.1 得到許多和解聯立方程組有關的性質. 首先若 $\det(A) \neq 0$, 表示 A 為 invertible, 我們知聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 一定有解且解唯一. 事實上此時由 Theorem 5.5.1 我們可以將此組解具體寫出. 這就是所謂的 *Cramer's Rule.*

Corollary 5.5.2 (Cramer's Rule)**.** 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix* 且 $\mathbf{b} =\in \mathbb{R}^n$ 為 *column vector.* 對於所有 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 *k-th column* 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ *matrix.* 則聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一的一組解, 且其解為

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \forall k = 1, \ldots, n.$$

Proof. 由假設 A 為 invertible, 知 $\det(A) \neq 0$ 且 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有解 (且解唯一). 然而 Theorem 5.5.1 告訴我們如果聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 則其解 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 需滿足 $c_k\det(A) = \det(B_k), \forall k = 1, \ldots, n$. 然而因 $\det(A) \neq 0$, 故由解的存在性知 $x_k = \det(B_k)/\det(A), \forall k = 1, \ldots, n$ 是唯一可能的一組解. $\square$

Example 5.5.3. 考慮 Example 5.4.4 中的矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 令 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 前面已知 $\det(A)=4\neq 0$, 我們可用 Cramer's rule 解聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. 此時將 $\mathbf{b}$ 置換於 A 的 1-st column, 得 $B_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 同理得 $B_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B_3=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B_4=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. 利用降階, 我們得 $\det(B_1)=42$, $\det(B_2)=12$, $\det(B_3)=-16$, $\det(B_4)=-4$. 故由 Cramer's rule 知 $x_1=21/2$, $x_2=3$, $x_3=-4$, $x_4=-1$ 是聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 之唯一一組解. 若令 $C_1=\begin{bmatrix} 21/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 我們會有

$$AC_1=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}=B_1.$$

同理若令

$$C_2=\begin{bmatrix} 1 & 21/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 21/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 21/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

我們會有 $AC_2=B_2$, $AC_3=B_3$ 以及 $AC_4=B_4$.

至於當 A 不是 invertible 時 (即 $\det(A)=0$), Theorem 5.5.1 就無法幫助我們找出聯立方程組的解. 不過由於 $\det(A)=0$, 故利用 Theorem 5.5.1 知若 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解, 則 $\det(B_k)=c_k\det(A)=0$, $\forall k=1,\ldots,n$. 換言之, 若存在 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\det(B_k)\neq 0$, 則聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 就無解.

Corollary 5.5.4. *假設 A 為 $n\times n$ non-invertible matrix 且 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ 為 column vector. 對於所有 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n\times n$ matrix. 若存在 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\det(B_k)\neq 0$, 則聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 無解.*

要注意 Corollary 5.5.4 的反向並不成立. 也就是說當 A 不是 invertible 時, 若對所有 $k=1,\ldots,n$, 皆有 $\det(B_k)=0$, 那麼我們是無從判斷聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 是否有解的. 例如在 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 的情形很容易判斷 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 且 $\det(A)=\det(B_1)=\det(B_2)=$

$\det(B_3) = 0$. 而當 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 時, 很容易判斷 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 無解, 但此時仍有 $\det(A) = \det(B_1) = \det(B_2) = \det(B_3) = 0$.

由上面這幾種情況可知, Cramer's rule 並不是有效處理聯立方程組的方法. 一般在處理特定的聯立方程組, 還是直接用 elementary row operations 處理較為快速. 不過在處理一般抽象的方程組問題時, Cramer's rule 因為可以具體描繪出解的形式, 所以是很有用的工具. 我們看以下的性質.

Proposition 5.5.5. *假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ matrix 其中 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. 若 $\det(A) = \pm 1$, 則對於任意 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 其中 $b_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解皆為整數.*

Proof. 由於 $\det(A) = \pm 1 \neq 0$, 利用 Cramer's rule 我們有聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解為 $x_1 = \pm\det(B_1), \ldots, x_n = \pm\det(B_n)$, 其中對任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, B_k 為將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ matrix. 由於 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ 且 $b_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. 我們知矩陣 B_k 的所有 entry 皆為整數. 利用 determinant 的定義, 我們知此時 $\det(B_k)$ 亦為整數, 得證聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解皆為整數. $\square$

另外一個 Cramer's rule 的應用就是幫我們找到 invertible matrix 的 inverse. 假設 $A \in \mathsf{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ 為 invertible 且 C 為 A 的 inverse, 則由 $AC = I_n$, 依矩陣乘法定義我們知 C 的 j-th column $\begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ 需滿足 $A\begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ 等於 I_n 的 j-th column $\mathbf{e}_j$. 也就是說 C 的 j-th column 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ 的解. 因此 C 的 (i, j)-th entry c_{ij} 應為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ 的解中 x_i 之值. 故由 Cramer's rule 知 $c_{ij} = \det(A(j,i))/\det(A)$, 其中 $A(j,i)$ 表示將 A 的 i-th column 用 $\mathbf{e}_j$ 取代的 $n \times n$ matrix. 然而利用對 $A(j,i)$ 的 i-th column 展開求 $\det(A(j,i))$, 我們得 $\det(A(j,i)) = (-1)^{j+i}\det(A_{ji}) = a'_{ji}$. 也就是說 c_{ij} 就是 A 的 (j,i) cofactor (注意 i, j 位置交換) 除以 $\det(A)$. 為了方便起見我們有以下的定義.

Definition 5.5.6. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ matrix, 對於任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 令 a'_{ij} 為 A 的 (i, j) cofactor. 考慮 $n \times n$ matrix A' 其 (i, j)-th entry 為 a'_{ij}. 我們稱 A' 為 A 的 *cofactor matrix* 而稱 A' 的 transpose $(A')^{\mathrm{t}}$ 為 A 的 *adjoint matrix*, 用 $\mathrm{adj}(A)$ 來表示.

注意 $\mathrm{adj}(A)$ 是將 A 的 cofactor 所成的矩陣 A' 取轉置而得, 千萬不要忘記取轉置. 另外要注意不管一個 $n \times n$ matrix 是否為 invertible, 皆可定義其 adjoint matrix.

我們回到剛才 A 為 invertible 的情況. 假設 C 為其 inverse. 依 $\mathrm{adj}(A)$ 的定義, 我們得到 C 的 (i, j)-th entry 就是 $\mathrm{adj}(A)$ 的 (i, j)-th entry 除以 $\det(A)$. 因此依矩陣係數積的定義, 我們有 $C = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$. 得證了以下的定理.

Proposition 5.5.7. 假設 A 為 $n\times n$ *invertible matrix.* 則

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A).$$

Example 5.5.8. 考慮 Example 5.4.4 中的矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\4&-2&7&8\end{bmatrix}$. 在 Example 5.5.3 中我們解出 $A\mathbf{x}=\mathbf{e}_1$ 的解, 事實上就是 A 的反矩陣 A^{-1} 的 1-st column. 在 Example 5.5.3 中的 $B_1=\begin{bmatrix}1&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\0&-2&7&8\end{bmatrix}$ 就是將 A 的 1-st column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,1)$. 若我們將 B_1 的 1-st column 展開求 $\det(B_1)$ 得 $\det(B_1)=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}2&1&2\\5&3&3\\-2&7&8\end{bmatrix}=42$ 就是 A 的 $(1,1)$ cofactor. 同樣的 $B_2=\begin{bmatrix}2&1&3&5\\0&0&1&2\\0&0&3&3\\4&0&7&8\end{bmatrix}$ 就是將 A 的 2-nd column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,2)$. 若我們將 B_2 的 2-nd column 展開求 $\det(B_2)$ 得 $\det(B_2)=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}0&1&2\\0&3&3\\4&7&8\end{bmatrix}=12$ 就是 A 的 $(1,2)$ cofactor. 同理得 B_3 是將 A 的 3-rd column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,3)$ 且 $\det(B_3)=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}0&2&2\\0&5&3\\4&-2&8\end{bmatrix}=-16$ 就是 A 的 $(1,3)$ cofactor. 而 B_4 是將 A 的 4-th column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,4)$ 且 $\det(B_4)=(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix}0&2&1\\0&5&3\\4&-2&7\end{bmatrix}=-4$ 就是 A 的 $(1,4)$ cofactor. 注意這裡求出的 cofactor 其實對應到 A 的 cofactor 所成的矩陣 A' 會是 A' 的 1-st row. 我們求出 A 其他的 cofactor 會有

$$a'_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}-1&3&5\\5&3&3\\-2&7&8\end{bmatrix}=-64,\quad a'_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}2&3&5\\0&3&3\\4&7&8\end{bmatrix}=-18,$$

$$a'_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}2&-1&5\\0&5&3\\4&-2&8\end{bmatrix}=20,\quad a'_{24}=(-1)^{2+4}\det\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&5&3\\4&-2&7\end{bmatrix}=10.$$

以及 $a'_{31}=26,a'_{32}=8,a'_{33}=-8,a'_{34}=-4,a'_{41}=-20,a'_{42}=-6,a'_{43}=8,a'_{44}=2$. 因此得

$$A'=\begin{bmatrix}42&12&-16&-4\\-64&-18&20&10\\-26&8&-8&-4\\-20&-6&8&2\end{bmatrix},\quad \operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}42&-64&-26&-20\\12&-18&8&-6\\-16&20&-8&8\\-4&10&-4&2\end{bmatrix}$$

也因此得

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 42 & -64 & -26 & -20 \\ 12 & -18 & 8 & -6 \\ -16 & 20 & -8 & 8 \\ -4 & 10 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

由上面例子可以看出利用 adjoint matrix 求反矩陣非常複雜, 所以在實際求反矩陣的情況還是利用從前學的 elementary row operation 的方法會比較快. 不過在證明抽象理論時, 利用 adjoint matrix 求 inverse 還是很有用的. 例如當 A 的每一個 entry 皆為整數時, 由於 $\mathrm{adj}(A)$ 的每一個 entry 也皆為整數, 因此若 $\det(A) = \pm 1$, 則由 Proposition 5.5.7 我們有以下的結果.

Corollary 5.5.9. 假設 A 為 $n \times n$ *matrix* 其中 A 的每一個 *entry* 皆為整數. 若 $\det(A) = \pm 1$, 則 A^{-1} 的每一個 *entry* 也皆為整數.

接下來我們探討有關 adjoint 的性質. 首先當 A 為 $n \times n$ invertible matrix 時, 由 Proposition 5.5.7 我們知 $\mathrm{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$. 因此由 A^{-1} 亦為 invertible 且 $(A^{-1})^{-1} = A$, 我們得 $\mathrm{adj}(A^{-1}) = \det(A^{-1})A$. 利用 determinant 的乘法性質 (Theorem 5.2.6 (2)), 我們有

$$\mathrm{adj}(A)\mathrm{adj}(A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})A^{-1}A = \det(I_n)I_n = I_n.$$

因此得證以下性質.

Proposition 5.5.10. 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix,* 則 $\mathrm{adj}(A)$ 也是 $n \times n$ *invertible matrix* 且 $\mathrm{adj}(A)^{-1} = \mathrm{adj}(A^{-1})$.

當我們考慮 A^{t} 的 (i,j) minor matrix $(A^{\mathrm{t}})_{ij}$ 其實是將 A 的 (j,i) minor matrix A_{ji} 取 transpose, 亦即 $(A^{\mathrm{t}})_{ij} = (A_{ji})^{\mathrm{t}}$. 因此 A^{t} 的 (i,j) cofactor $(-1)^{i+j}\det((A^{\mathrm{t}})_{ij})$ 等於 $(-1)^{i+j}\det((A_{ji})^{\mathrm{t}}) = (-1)^{j+i}\det(A_{ji})$ (我們用到 $\det(A^{\mathrm{t}}) = \det(A)$). 也就是說 A^{t} 的 (i,j) cofactor 就是 A 的 (j,i) cofactor. 因此將 A 的 cofactor matrix A' 取轉置就是 A^{t} 的 cofactor matrix. 換言之, 若我們先將 A 轉置得 A^{t} 再取 A^{t} 的 cofactor matrix 也會是 $\mathrm{adj}(A)$. 也因此若將 A^{t} 轉置得 A (因為 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A$) 後取 A 的 cofactor matrix 就會是 $\mathrm{adj}(A^{\mathrm{t}})$. 然而將 A 的 cofactor matrix 取轉置就是 $\mathrm{adj}(A)$, 因此得 $\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{adj}(A^{\mathrm{t}}))^{\mathrm{t}}$. 再取轉置得證以下的結果.

Proposition 5.5.11. 假設 A 為 $n \times n$ *matrix,* 則 $\mathrm{adj}(A^{\mathrm{t}}) = \mathrm{adj}(A)^{\mathrm{t}}$.

當 A 為 $n \times n$ invertible matrix 時, 由 Proposition 5.5.7 我們知 $\mathrm{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$. 因此由矩陣乘法與係數積關係 (Proposition 2.1.10) 得

$$A(\mathrm{adj}(A)) = A(\det(A)A^{-1}) = \det(A)(AA^{-1}) = \det(A)I_n.$$

這個性質, 其實不只對 invertible matrix 成立, 其實對一般的 $n \times n$ matrix 皆成立. 首先考慮一般的 $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$. 依定義 $\mathrm{adj}(A)$ 的 (i,j)-th entry 為 a'_{ji}. 因此依矩陣乘法的定義 $A(\mathrm{adj}(A))$ 的 (i,j)-th entry 為

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\det(A_{jk}). \tag{5.7}$$

當 $i=j$ 時, 式子 (5.7) 恰為對 A 的 i-th row 展開所得的 $\det(A)$. 因此得 $A(\mathrm{adj}(A))$ 的 (i,i)-th entry (即 diagonal entry) 為 $\det(A)$. 而當 $i\neq j$ 時, 考慮 B 為將 A 的 j-th row 用 A 的 i-th row 取代, 而其他 row 保持不變的 $n\times n$ matrix. 此時對任意 $k=1,\ldots,n$, 因為 B 的 (j,k) minor matrix 是將 B 的 j-th row 除去, 所以和 A 的 (j,k) minor matrix 相同, 也就是說 $B_{jk}=A_{jk}$. 然而此時 B 的 (j,k)-th entry 因為是在 j-th row, 所以和 A 的 (i,k)-th entry 是一樣的, 也就是說 $b_{jk}=a_{ik}$. 現考慮利用 B 的 j-th row 展開所得的 $\det(B)$, 依定義為

$$\det(B)=\sum_{k=1}^{n} b_{jk}b'_{j,k}=\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(-1)^{j+k}\det(B_{jk})=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\det(A_{jk}).$$

此與式子 (5.7) 是一致的. 也就是說當 $i\neq j$ 時, $A(\mathrm{adj}(A))$ 的 (i,j)-th entry 恰為 $\det(B)$. 然而 B 的 i-th row 和 j-th row 是一樣的, 故知 $\det(B)=0$. 因此我們證得當 $i\neq j$ 時, $A(\mathrm{adj}(A))$ 的 (i,j)-th entry 等於 0, 也因此證得了 $A(\mathrm{adj}(A))=\det(A)I_n$. 利用類似的方法考慮 column 的展開, 我們也可證得 $(\mathrm{adj}(A))A=\det(A)I_n$. 不過我們這裡想用前面有關 adjoint 和 transpose 的關係 (Proposition 5.5.11) 證明以下的定理.

Theorem 5.5.12. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix,* 則

$$A(\mathrm{adj}(A))=(\mathrm{adj}(A))A=\det(A)I_n.$$

Proof. 前面已證得 $A(\mathrm{adj}(A))=\det(A)I_n$. 因為這是對所有 $n\times n$ matrix 皆成立, 故將 A 以 A^{t} 代換得 $A^{\mathrm{t}}(\mathrm{adj}(A^{\mathrm{t}}))=\det(A^{\mathrm{t}})I_n$. 由 Proposition 5.5.11 以及 $\det(A^{\mathrm{t}})=\det(A)$, 我們得 $A^{\mathrm{t}}(\mathrm{adj}(A)^{\mathrm{t}})=\det(A)I_n$. 將此等式兩邊取 transpose 得證 $(\mathrm{adj}(A))A=\det(A)I_n$. □

再次強調, Proposition 5.5.7 的證明是利用 Cramer's rule 因此需用到 $\det(A)\neq 0$ 之假設. 而 Theorem 5.5.12 是對一般 $n\times n$ matrix 皆成立的. 然而我們可以利用 Theorem 5.5.12 推得 Proposition 5.5.7, 所以可以說 Theorem 5.5.12 是 Proposition 5.5.7 的推廣.

Example 5.5.13. 考慮 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$. 依定義, 我們有

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}\\ -\det\begin{bmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3\\ c_1 & c_3\end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{bmatrix}\\ \det\begin{bmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

依矩陣乘法定義 $A(\mathrm{adj}(A))$ 的 $(1,1)$-th, $(2,2)$-th 和 $(3,3)$-th entry 分別為

$$a_1\det\begin{bmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{bmatrix}-a_2\det\begin{bmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{bmatrix}+a_3\det\begin{bmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{bmatrix},$$

$$-b_1\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{bmatrix}+b_2\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3\\ c_1 & c_3\end{bmatrix}-b_3\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{bmatrix},$$

$$c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - c_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + c_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

它們為 A 分別依 1-st, 2-nd 和 3-rd row 展開所得的 determinant, 故皆等於 $\det(A)$. 而 $A(\operatorname{adj}(A))$ 的 $(1,2)$-th, $(3,2)$-th entry 分別為

$$-a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} + a_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} - a_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$-c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} + c_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} - c_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

它們分別是將 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 依 2-nd row 展開所得的 determinant, 故皆為 0. 同樣的 $A(\operatorname{adj}(A))$ 的 $(2,1)$-th, $(3,1)$-th entry 分別為

$$b_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - b_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + b_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$c_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - c_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + c_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

它們分別是將 $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 依 1-st row 展開所得的 determinant, 故皆為 0. 最後 $A(\operatorname{adj}(A))$ 的 $(1,3)$-th, $(2,3)$-th entry 分別為

$$a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

$$b_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - b_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + b_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

它們分別是將 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ 依 3-rd row 展開所得的 determinant, 所以也皆為 0. 我們得

$$A(\operatorname{adj}(A)) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

最後我們要探討 $\operatorname{adj}(A)$ 的 determinant. 注意, 因為 $\det(A)I_n$ 是 diagonal matrix, 所以也是 upper triangular matrix. 因此依 Proposition 5.2.9 我們知 $\det(A)I_n$ 的 determinant 為其 diagonal entry 的乘積 $\det(A)^n$. 因此由 $A(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)I_n$ 等式兩邊取 determinant 得到以下結果.

Corollary 5.5.14. *假設 A 為 $n \times n$ matrix, 則*

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

5.6. 結論

Determinant 是 square matrix 上特有的一種函數. 它是從 $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 映射到 $\mathbb{R}$ 的一種 multi linear function. 另一方面 determinant 也將 $\mathbb{R}^2$ 中兩個向量所展出平行四邊形的有向面積以及 $\mathbb{R}^3$ 中三個向量所展出平行六面體的有向積積推廣到 $\mathbb{R}^n$ 的情形. 利用 determinant 我們可以判斷一個 square matrix 是否為 invertible, 也可幫助我們找到一個 invertible matrix 的 inverse, 甚至將聯立方成組的解寫下. 不過一般求 determinant 的過程頗繁雜, 我們可以善用 determinant 的性質, 適時的利用 elementary row operations 以及降階的方法將它求出.