Linear Algebra (II) Exercise (Week 2)

March 01, 2024

1. 考慮矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) 利用 Cramer's Rule 解聯立方程組 $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (b) 求 B 的 cofactor matrix, adjoint matrix 以及 inverse matrix.

2. 假設 A 的每一個 entry 皆為整係數的 n 階方陣.

   (a) 利用數學歸納法證明 $\det A$ 為整數.

   (b) 若 A 為可逆且 A^{-1} 的每一個 entry 皆為整數，證明 $\det A = \pm 1$.

3. 以下為探討 Vandermonde matrix. 假設 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ 為相異實數. 考慮多項式

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix}.$$

   (a) 例如 $n = 3$ 時, $f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$. 利用對 3-rd row 降階方式，證明此時 $f(x)$ 的最高次項為 $(c_2 - c_1)x^2$.

   (b) 當 $n = 3$ 時, 說明 c_1, c_2 為 $f(x) = 0$ 的兩相異實根, 並依此利用因式定理證明

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_1).$$

   (c) 利用數學歸納法證明在一般情形 $f(x)$ 的最高次項為

$$\prod_{1 \le i < j \le n-1} (c_j - c_i) x^{n-1}.$$

   試說明 $f(x) = 0$ 所有的 $n - 1$ 個實根為何，並依此證明

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i).$$