Linear Algebra (II) Exercise (Week 3)
March 08, 2024

1. 請證明以下有關於 adjoint matrix 的性質。
   (a) 若 A 為 upper triangular, 則 $\mathrm{adj}(A)$ 亦為 upper triangular.
   (b) 若 A 為 symmetric, 則 $\mathrm{adj}(A)$ 亦為 symmetric.
   (c) 若 A,B 皆為 n 階方陣，則 $(BA)(\mathrm{adj}(A)\mathrm{adj}(B)) = \det(AB)I_n$.
   (d) 若 A,B 皆為 n 階 invertible matrix，則 $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$.
2. 以下所定的函數是否為 linear transformation？若是請證明; 若不是請舉例說明.
   (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (|x|,-z,y)$.
   (b) 給定 $B \in M_n$, 令 $T_2 : M_n \to M_n$, $A \mapsto AB^2 + BA$.
   (c) 給定 $B \in M_n$, 令 $T_3 : M_n \to M_n$, $A \mapsto AB + BA^2$.
   (d) P_n 為次數小於 $n+1$ 的多項式所成 vector space, 令 $T_4 : P_n \to P_{n+1}$,
   $$f(x) \mapsto f(0) + xf(x) + x^2 f'(x).$$
3. 考慮函數 $T : M_2 \to M_2$.
   (a) 若已知 $T(A) = A^{\mathrm{t}}$, $\forall A \in M_2$, 證明 T 為 linear transformation.
   (b) 若已知 T 為 linear transformation 且滿足
   $$T(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}; T(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$
   $$T(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}; T(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$
   證明 $T(A) = A^{\mathrm{t}}$, $\forall A \in M_2$.
4. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 為 standard inner product space. 已知 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 滿足以下保距性質：
   $$(1)\ T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}; \quad (2)\ \|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$
   (a) 證明 $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ 以及 $\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$
   (b) 考慮 standard basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 若已知 $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. 證明
   $$T(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i.$$
   (c) 證明 T 為 linear transformation.