Linear Algebra (II) Exercise (Week 5)
March 20, 2024

1. 當 $T:V\to W$ 為一對一且映成，由函數的性質我們知道存在唯一的 $T^{-1}:W\to V$ 為 T 的反函數，滿足對所有 $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ 皆有 $T^{-1}\circ T(\mathbf{v})=\mathbf{v}$ 以及 $T\circ T^{-1}(\mathbf{w})=\mathbf{w}$. 在講義 Theorem 6.4.3 我們證明了在一般的情況 (不限 V,W 為有限維)，當 T 為 linear transformation, 則 T^{-1} 亦為 linear transformation. 以下將對 V,W 為有限維的情形證明此性質。
   (a) 若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis 且令 $\mathbf{w}_i=T(\mathbf{v}_i), i=1,\dots,n$. 證明 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n$ 為 W 的一組 basis.
   (b) 利用 (a) 中 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n$ 建構出一個 linear transformation $F:W\to V$ 滿足對所有 $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ 皆有 $F\circ T(\mathbf{v})=\mathbf{v}$ 以及 $T\circ F(\mathbf{w})=\mathbf{w}$. 因此由反函數的唯一性證得 $F=T^{-1}$, 也因此 T^{-1} 亦為 linear transformation.

2. 考慮 linear transformation $T:P_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ 定義為 $T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} b+c & a \\ b & c\end{bmatrix}$.
   (a) 試求 $[T]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$, 其中 ε,ε' 分別為 $P_2(\mathbb{R}),M_2(\mathbb{R})$ 的 standard ordered basis
   $$\varepsilon=(1,x,x^2),\varepsilon'=(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}).$$
   (b) 試求 $[T]_{\beta}^{\gamma}$, 其中 β,γ 分別為 $P_2(\mathbb{R}),M_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis
   $$\beta=(1,x,1+x^2),\gamma=(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}).$$
   (c) 試分別利用 (a), (b) 的表現矩陣求 $N(T)$ 和 $R(T)$ 的一組 basis.

3. 假設 $\beta=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$ 為 V 的一組 ordered basis. 令
   $$\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+3\mathbf{v}_4,\ \mathbf{w}_2=-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+2\mathbf{v}_4,$$
   $$\mathbf{w}_3=5\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+5\mathbf{v}_4,\ \mathbf{w}_4=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3-3\mathbf{v}_4,\ \mathbf{w}_5=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2.$$
   (a) 依照 $\mathbf{w}_i$ 編號由小到大寫下 V 的一組 ordered basis β'.
   (b) 假設 $T_{\beta'}$ 為用 β' 將 V 坐標化的函數, 試寫下 $T_{\beta'}(\mathbf{v}_i)$, $i=1,2,3,4$.
   (c) 說明方陣 $\big(T_\beta(\mathbf{w}_1),T_\beta(\mathbf{w}_2),T_\beta(\mathbf{w}_4),T_\beta(\mathbf{w}_5)\big)$ 和 $\big(T_{\beta'}(\mathbf{v}_1),T_{\beta'}(\mathbf{v}_2),T_{\beta'}(\mathbf{v}_3),T_{\beta'}(\mathbf{v}_4)\big)$ 的關係.

4. 考慮 linear transformation $T:V\to W$.
   (a) 假設 T 為 isomorphism. 證明存在 V, W 的 ordered basis β,γ 使得 $[T]_\beta^\gamma$ 為 identity matrix.
   (b) 假設 $\dim(V)=m$, $\dim(W)=n$ 且 $\operatorname{rank}(T)=k$. 證明存在 V, W 的 ordered basis β,γ 使得 $[T]_\beta^\gamma=(a_{ij})$ 為 $n\times m$ matrix 其中 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if } i=j \text{ 且 } 1\le i\le k;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$