Linear Algebra (II) Exercise (Week 10)

April 26, 2024

1. 以下矩陣試說明那些矩陣可以在實數對角化, 那些不可以. 若矩陣 A 可對角化, 請找到可逆矩陣 U 以及對角矩陣 D 使得 $U^{-1}AU = D$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. 假設 A,B 皆為 n 階方陣.
   (a) 證明若 A,B 皆為 diagonalizable 且 A,B 有相同的 characteristic polynomial, 則 A 和 B 為 similar.
   (b) 考慮 $n = 3$ 的情況，試找到矩陣 A,B 其 characteristic polynomial 皆為 $-x^3$ 但 A 和 B 不是 similar.

3. 已知 A 為 $n \times n$ diagonalizable matrix.
   (a) 證明 A^{t} 為 diagonalizable （參見講義 Question 8.1, 8.2）。說明你是用可對角化的等價關係中的哪一個證明的。
   (b) 考慮 $n = 2$ 的情形，假設向量 $(a,b),(c,d)$ 為 A 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1, λ_2，試找出 A^{t} 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues。
   (c) 假設 A 為 invertible，證明 A^{-1} 為 diagonalizable。說明你是用可對角化的等價關係中的哪一個證明的。
   (d) 假設 A 為 invertible，考慮 $n = 2$ 的情形。假設向量 $(a,b),(c,d)$ 為 A 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 且其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1, λ_2，試找出 A^{t} 的兩個 linearly independent 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues。

4. 考慮 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中的 nonzero vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 且令 $c = a_1 + \cdots + a_n$.

   考慮 $n \times n$ matrix A，其中 A 的每個 column 皆為 $\mathbf{v}$. 我們要探討 A 是否可對角化。
   (a) 利用 dimension 定理求 A 的 nullity. 說明 0 為何會是 A 的 eigenvalue 以及 0 的 geometric multiplicity.
   (b) 請問 eigenvalue 0 其 algebraic multiplicity 與 geometric multiplicity 之間的關係，並以此說明 x^{n-1} 必整除 A 的 characteristic polynomial.
   (c) 利用 trace 與 characteristic polynomial 的關係說明 A 的 characteristic polynomial 為 $(-1)^n(x^n - cx^{n-1})$.
   (d) 說明 A 可以對角化若且唯若 $c \neq 0$.
   (e) 利用對任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ 皆有 $A\mathbf{w} \in \mathrm{Col}(A)$，說明 $\mathbf{v}$ 一定是 A 的一個 eigenvector，並求其 eigenvalue.
   (f) 若 $c \neq 0$ 試寫下可逆矩陣 P 以及對角矩陣 D 使得 $P^{-1}AP = D$。（注意：你需具體找到 $N(A)$ 的一組 basis.）