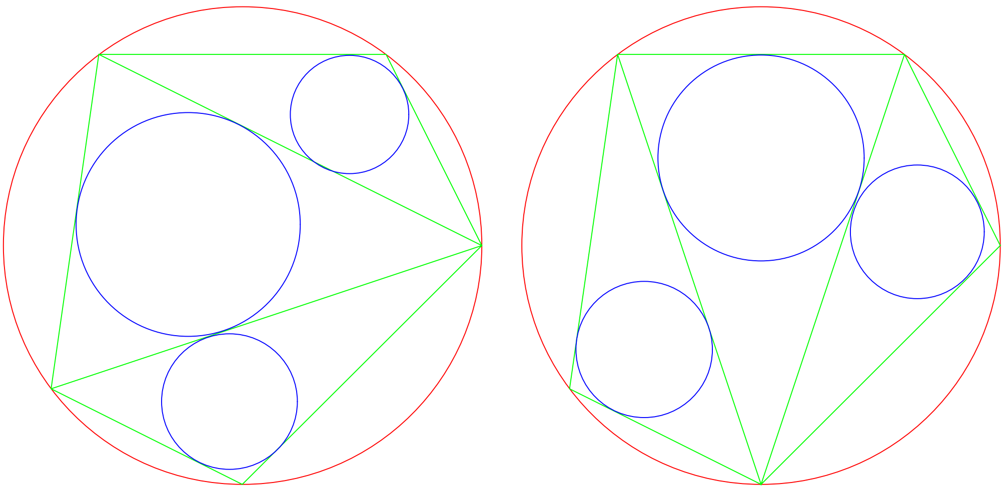
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

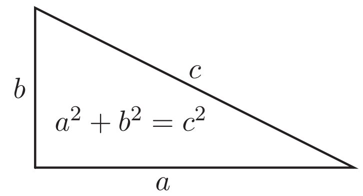
1 迷人的勾股定理與漂亮的質數定理 **1**

1.1 迷人的勾股定理 1

1.2 漂亮的質數定理 3

1　迷人的勾股定理與漂亮的質數定理

『勾股定理』（一說『商高定理』或西方人說的『畢達哥拉斯定理』）與『質數定理』是幾何與數論上兩個基本且漂亮的定理。



2，3，5，7，11，13，……

勾股定理　　　　質數定理

相傳畢達哥拉斯成功地證明了勾股定理之後，感到欣喜若狂，便叫他的學生們宰了一百頭牛，舉辦了一場盛大的宴會，一連慶祝了好幾天。因此，這個定理又被暱稱為『百牛定理』。歷來勾股定理的各種證明層出不窮，直到今天為止，人們已經發現了四百多種有關勾股定理的證明。特別是在魯米司的《畢氏定理》一書就列了三百七十個之多。在這裡我們提供幾種賞心悅目、一目了然的證明：

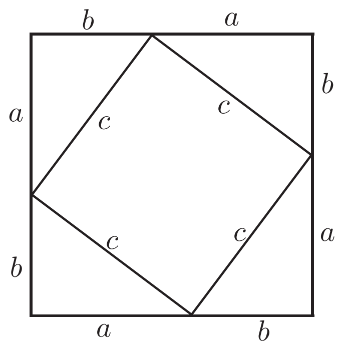
1.1　迷人的勾股定理

定理 **1.1** (勾股定理) 以 a, b, c 為勾、股、弦之直角三角形必有

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【周髀算經的方形切割證法】由下圖得到的面積關係為

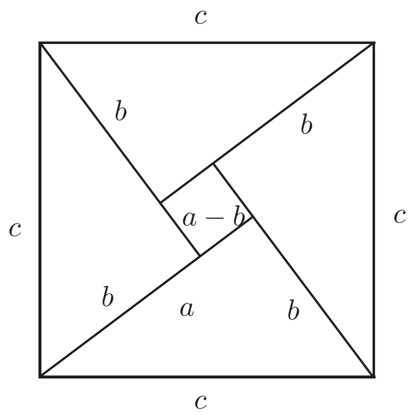
$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$



上圖為三國時代趙爽注《周髀算經》的勾股圓方圖之左圖。

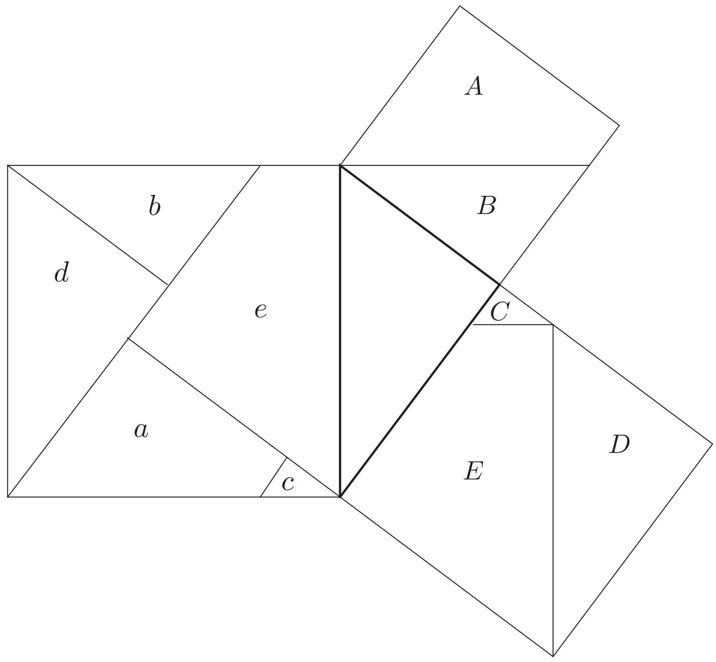
【婆什迦邏的方形切割證法】由下圖得到的面積關係為

$$(a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$



婆什迦邏是印度人，生於第十二世紀。

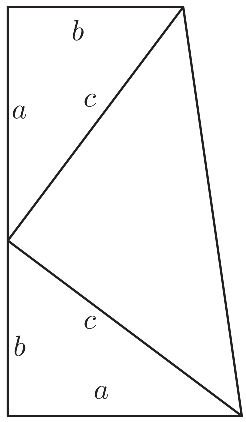
【伊本柯拉的證法】你是否可以由下圖的面積分割得到勾股定理：



伊本柯拉是阿拉伯人，生於第九世紀。事實上，文藝復興時代的達文西也給過這種證法。

【伽菲爾德總統的梯形證法】由下圖得到的面積關係為

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$



伽菲爾德是美國第二十任總統。 ⊠

【勾股定理註解】以證明的精神來說，本文所列的勾股定理證明可以分成兩種。

第一種： 利用直角三角形拼湊出可以算面積的多邊形，再採用兩種不同的方法算出面積，即得到一個有價值的恆等式（$c^2 = a^2 + b^2$）。

第二種： 利用與直角三角形的邊平行的線將三個正方形切割成面積一一對應的多邊形。

1.2 漂亮的質數定理

歷史上對「質數有無窮多個」給了很多不同的證明方法。在此，我們提出幾種有名的證明方法；讓讀者瞭解同一個問題是可以從很多不同的角度來切入進行。質數定理是《幾何原本》第九冊，底下的第一個證法就是歐基里得在《幾何原本》上的證明。

定理 **1.2** (質數定理) 質數有無限多個。

【歐基里得證法】假設質數只有有限個並將質數依其大小排列如下

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots, p_n\text{。}$$

現在考慮正整數 $N = p_1p_2p_3\cdots p_n + 1$。因為 $N > p_n$，所以 N 不是質數。根據因數分解：N 必定被某個質數整除，不妨設這個質數為 $p_r, (1 \le r \le n)$。因此我們有

$$\begin{cases} p_r \mid p_1p_2\cdots p_r\cdots p_n + 1; \\ p_r \mid p_r. \end{cases}$$

由此推得

$$p_r \mid 1.$$

這與 $p_r \ge 2$ 矛盾，所以質數有無窮多個。

【庫莫爾證法】庫莫爾證法與歐基里得證法大同小異，差別只在庫莫爾取正整數

$N=p_1p_2p_3\cdots p_n-1$。同樣可以有 $N>p_n$；因此存在一個質數 p_r 整除 N。因此我們有

$$\begin{cases} p_r \mid p_1p_2\cdots p_r\cdots p_n-1; \\ p_r \mid p_r. \end{cases}$$

由此推得

$$p_r|1.$$

這與 $p_r\geq 2$ 矛盾，所以質數有無窮多個。

【波利亞證法】波利亞考慮費馬數數列 F_n 如下

$$F_n=2^{2^n}+1,\quad (n\geq 0).$$

利用數學歸納法，我們容易知道費馬數數列 F_n 有如下的恆等式：

$$F_n-2=F_0F_1\cdots F_{n-1}.$$

如果 $n>m$，我們設 F_n 與 F_m 的最大公因數為 d，即 $(F_n,F_m)=d$。由恆等式，我們有

$$\begin{cases} d \mid F_m; \\ d \mid F_n=F_0F_1\cdots F_{n-1}+2. \end{cases}$$

因此有 $d|2$。因為 F_n 都是奇數，所以 F_n 與 F_m 互質。因此我們得到費馬數數列 F_n 兩兩互質。由此我們推得第 n 個費馬數 F_n 至少有一個質因數 p 不整除 $F_0,F_1,\cdots,F_{n-1}$。因此質數應該不是有限個。

【朔龍證法】朔龍的證法與波利亞的證法大同小異，差別只在朔龍證明：如果 $1\leq i<j\leq n$，則

$$(i\times n!+1,j\times n!+1)=1.$$

（留給讀者自己證明）。這個結果告訴我們

$$1\times n!+1,2\times n!+1,\cdots,n\times n!+1$$

兩兩互質。所以質數的個數不應該少於 n 個。因為 n 可以任意取，所以質數應該不是有限個。

【尤拉證法】尤拉首先假設質數僅有 $p_1=2,p_2=3,\cdots,p_n$ 等 n 個。對每個質數 p_i，我們有無窮等比級數和如下：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\frac{1}{1-1/p_i}.$$

將這有限個無窮等比級數和相乘得到

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots \quad &=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}\right) \\ &=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-1/p_i}. \end{aligned}$$

這與無窮數和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

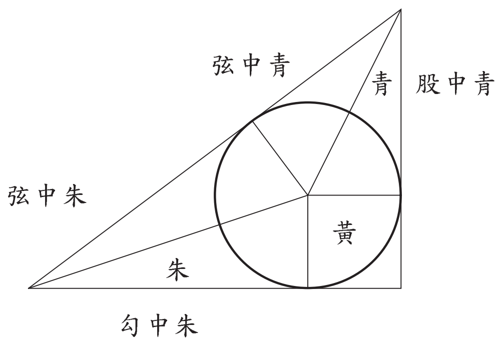
發散矛盾。 $\boxtimes$

歐基里得是第一個使用“反證法（歸謬證法）” 的數學家。自從他利用反證法成功的證明了質數有無窮多個之後，反證法便成為數學證明的一個重要手法。另外值得一提的是，除了直接證法、反證法之外，另一個重要的證明方法就是“數學歸納法”。因此直接證法、反證法、數學歸納法便成為數學證明的三個重要的方法。事實上，還有一種叫做“費馬無窮遞降法”的證明方法，它可以看成數學歸納法的反面證法，就像反證法是直接證法的反面一樣。

在這個定理的多種證明方法中，歐基里得、庫莫爾及尤拉的證法是屬於“反證法（歸謬證法）”；波利亞及朔龍的證法應該是屬於“直接證法”。從這個定理的多種證明中，我們應該會深深的體會到：一個數學問題的解決是可以從許多個方向來切入進行。但是先決條件是我們必須具備有足夠多的數學基本知識。

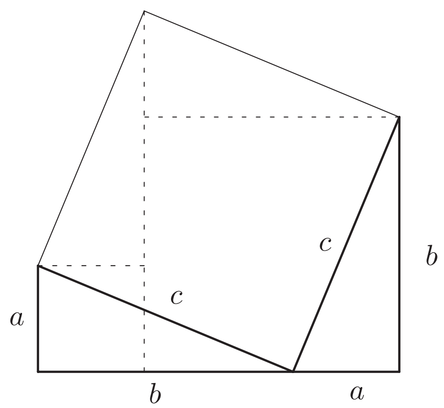
習題 **1.1** 下圖為九章算術勾股章中的勾股容圓圖。試證明

$$\text{圓直徑} = \text{勾} + \text{股} - \sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}.$$



勾股容圓圖

習題 **1.2** 下圖是清初梅文鼎有關勾股定理的證明圖。你能完成它的文字證明部分嗎？



習題 **1.3** 對於勾股定理，你有自己的證明嗎？如果沒有，可以去查一下魯米司的書。又勾股定理是高中數學課程中那個定理的特例，你知道嗎？

習題 **1.4** 試說明伽菲爾德總統的證法與周髀算經的證法是否有關連？

習題 **1.5** 設 AB 與 CD 是圓上兩條互相垂直的弦。試證明：

$$AD^2 + BC^2 = \text{圓直徑}^2.$$

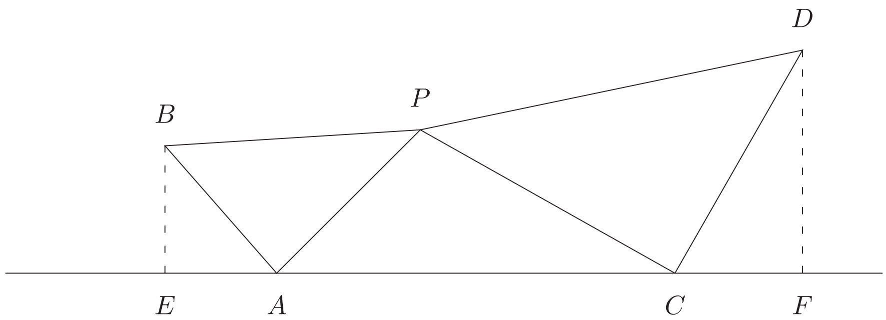
習題 **1.6** 在凸四邊形 $ABCD$ 中， ABC 為正三角形且滿足 $\angle ADC = 30^\circ$。證明：

$$BD^2 = CD^2 + AD^2.$$

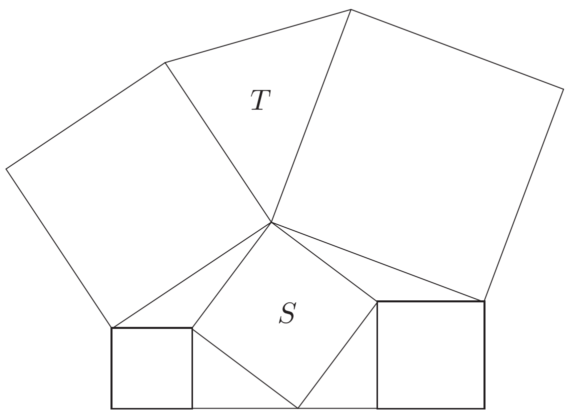
習題 **1.7** 如下圖：三角形 PAB 與三角形 PCD 為相似三角形且

$$\angle PAB = \angle PCD = 90^\circ.$$

若線段 BE, DF 分別與直線 AC 垂直，則證明：$EA = FC$。

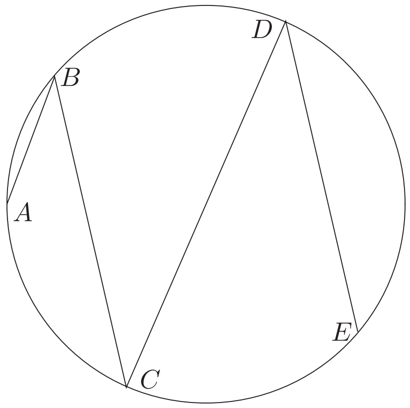


習題 **1.8** 古代日本常將數學問題刻在神廟的樑柱上，下圖就是一個例子。它是一個由五塊正方形所搭成的廟宇平面圖。 T 與 S 分別代表所在三角形與正方形的面積。試導出 T 與 S 的關係。



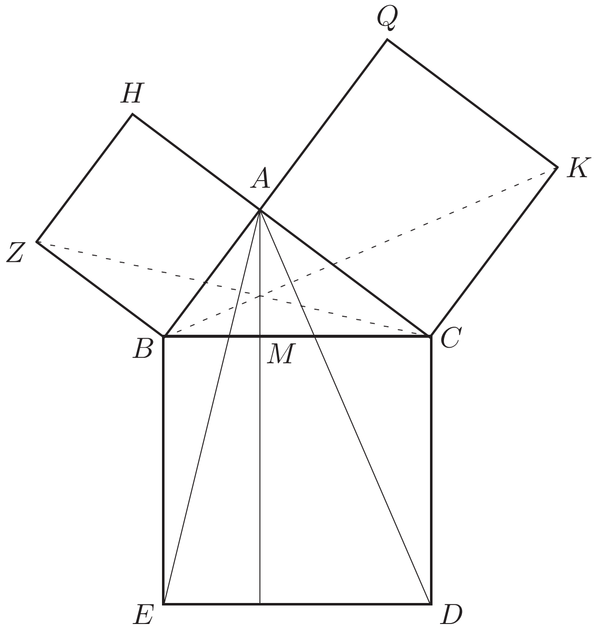
習題 **1.9** 如下圖：$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45^\circ$。證明：

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2.$$



D
B
A
E
C

動手玩數學



左圖是歐基里得在《幾何原本》第一冊證明勾股定理所巧添的補助線，你能完成文字的證明部分嗎？

挑戰題

考慮底下的等差數列表：

4	7	10	13	16	19	22	25	$\cdots$
7	12	17	22	27	32	37	42	$\cdots$
10	17	24	31	38	45	52	59	$\cdots$
13	22	31	40	49	58	67	76	$\cdots$
16	27	38	49	60	71	82	93	$\cdots$
19	32	45	58	71	84	97	110	$\cdots$
22	37	52	67	82	97	112	127	$\cdots$
25	42	59	76	93	110	127	134	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

證明：

(1) 如果正整數 n 在上表中出現，則 $2n+1$ 不是質數。

(2) 如果 $2n+1$ 不是質數，則正整數 n 可以在上表中找到。

趙爽與畢達哥拉斯

趙爽（三國時吳人，一說魏晉人，或漢人）的勾股圓方圖（共有弦圖、左圖、右圖三個圖）是《周髀算經注》首章上重要的幾何圖形。勾股圓方圖的注僅短短五百餘字，概括了《周髀算經》與《九章算術》（與《周髀算經》約同時成書）以來中國人關於勾股定理的成就，例如書中有由勾股差，股弦差求勾、股、弦的公式。清阮元編的《

疇人傳》說勾股圓方圖注“五百余言耳，而后人數千言所不能詳者，皆包蘊無遺，精深簡括，誠算術之最也”。

畢達哥拉斯，希臘數學家（約公元前五百年前出生）。公元前 520 年左右建立了一個宗教、政治、學術合一的團體-畢達哥拉斯學派。傳統說法，一致認為勾股定理是畢達哥拉斯發現的，因此西方稱之為畢達哥拉斯定理。畢達哥拉斯學派在幾何方面還發現了五種正多面體：正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體和正二十面體。並證明了正多面體只限於這五種。

數學家愛爾特希曾經利用勾股定理證明：平面上任意不共線的 n 個點。當任兩個點畫一條直線時，那麼至少可畫出 n 條相異的直線。 有興趣的讀者可以嘗試看看!