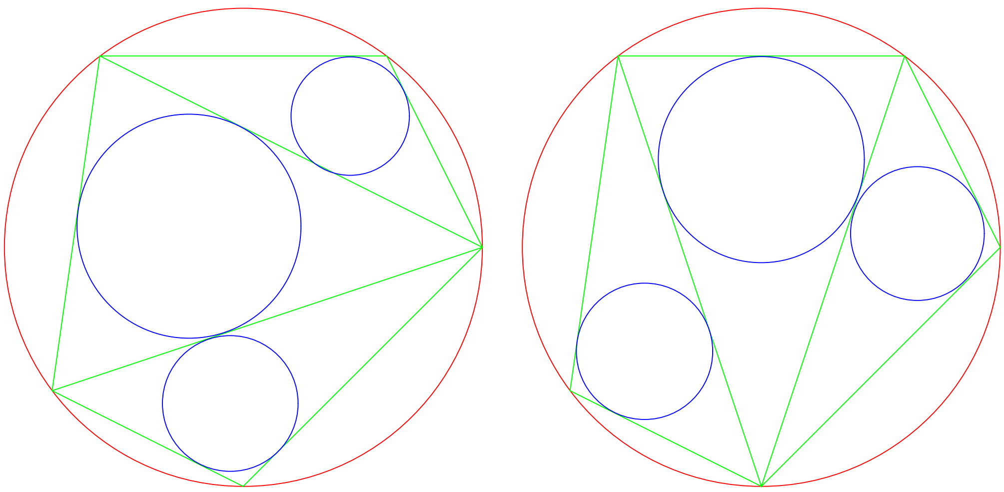
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 大家來算 π

> 劉徽割圓術：
> 割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。

大家都知道圓周率 π 的近似值為

$$3.141592653\cdots\cdots.$$

可是你曾想過這個既神祕又浪漫的數 π 的定義是甚麼嗎？它又是如何估算出來的呢？本文章就是要從歷史上不同的角度來瞭解 π，及瞭解數學家如何估計 π 的近似值。

古代人類（或者數學家）在割地（或作圖）時，最常使用的工具大概就是直尺與圓規了。直尺用來畫直線或線段，圓規可以用來畫各種大小不同尺寸的圓。因此直線、線段與圓便構成初等幾何（人類認識幾何）的基本要素。因為直線、線段是直直的，度量長度時比較簡單，所以它們比較單純。至於圓，因為是屬於弧線造型，不容易測量長度，所以比較神祕一點。也因為這樣，嘗試去解開圓的神秘性（測量它的長度與面積）便成為初等幾何學上首先要克服的問題。在平面上取一個固定點當圓心，用圓規畫一個圓，再用直尺畫一條通過圓心的直線。這時自然產生兩個要測量的線段，一個是這個圓的周長（弧形），另一個則是將這個圓面積二等分的直徑（直線形）。如果我們將所畫出的圓與直徑放在影印機下，調整影印的倍數，則可以得到所有不同大小尺寸的圓。此時圓的周長與直徑亦隨著這個倍數伸縮。因此我們得到一個結論就是“任一圓的周長與其直徑的比值是一個固定的常數”。我們把這個神祕的常數稱為圓周率，用符號 π 來表示，也就是說

$$\text{圓周率 } \pi = \frac{\text{任意圓的周長}}{\text{這個圓的直徑}}.$$

因為直徑將圓二等分，直觀上，上半圓弧（及下半圓弧）都比直徑來得長，所以對圓周率 π 的一個最粗造的估算是“$\pi > 2$”。底下將分別依歷史發展的過程，來估算 π 的近似值。

1.1 π 與外切、內接多邊形

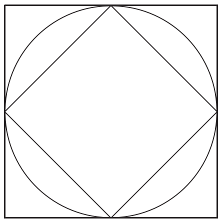
> 阿基米德利用外切、內接多邊形，
> 得到 π 的範圍 $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$。

如下圖是一個半徑為 1 單位長的圓及此圓的外切、內接正方形。容易算得外切正方形的邊長為 2 單位；內接正方形的邊長是 $\sqrt{2}$ 單位。由圓周率 π 的定義知道此圓的周長為 2π。由

$$\text{外切正方形的周長} \ \geq \ \text{圓的周長} \ \geq \ \text{內接正方形的周長},$$

得到

$$4\cdot 2 \geq 2\pi \geq 4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 4 \geq \pi \geq 2\sqrt{2} \doteq 2.828.$$



如果將單位圓的圓外切、內接正方形改成正六邊形，則我們得到：內接正六邊形的邊長是 1 單位；內接正六邊形的邊長是 $2/\sqrt{3}$ 單位。仿照上面的方法，得到

$$4\sqrt{3} \geq 2\pi \geq 6 \Rightarrow 3.464 \doteq 2\sqrt{3} \geq \pi \geq 3.$$

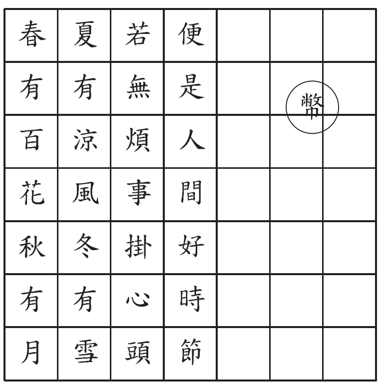
從這兩個結果知道：外切、內接多邊形的邊數越大時，所得到的近似範圍越小。

中國的劉徽割圓術（魏末晉初人）也是利用圓內接多邊形面積來逼近圓周率的。劉徽在數學上的貢獻就是將中國最古的數學著作之一《九章算術》詳細整理（公元 263 年）。他在注《九章算術》中求圓周率是用圓內接正六邊形起算，算到正 192 邊形，這時候 π 的近似值為 3.141024。最後我們將劉徽的原話摘錄如下，供讀者玩味：“割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。”

1.2 π 與機率

> 若隨機的寫出兩個正整數，
> 則兩數互質的機率為 $6/\pi^2$。

前一節是利用圓的外切及內接正多邊形的周長來估算圓周率 π的範圍。這也是希臘數學家阿基米德所採取的方法。本節是要介紹機率的方法來估計圓周率 π 的近似值。如下圖：將直徑為 1 單位的硬幣投擲在單位方格所構成的棋盤上。

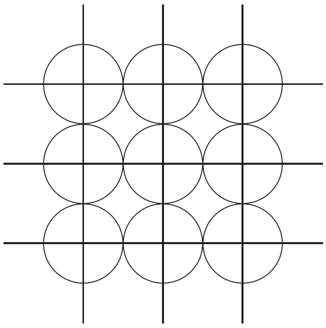


首先從機率的理論來算：投擲的硬幣落下時蓋住某個格子點（如上圖所示）的機率。如下圖，硬幣落下時，若欲蓋住某個格子點，則硬幣的圓心必須落在某個圓的區域

內。因為整個區域是很對稱且均勻的，所以只需限制在一個單位格子上來算機率即可。四個半圓加起來剛好是一個圓，所以總面積為

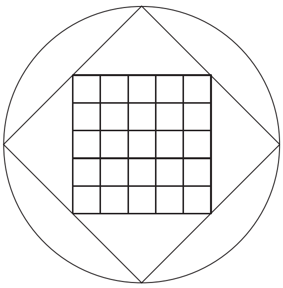
$$\pi \times 半徑^2 = \frac{\pi}{4}.$$

單位方格的面積是 1，所以硬幣落下時蓋住某個格子點的理論機率為 $\pi/4$。



現在我們來討論硬幣落下時蓋住某個格子點的實驗機率。也就是實際投擲硬幣若干次（比如一千次）後，硬幣落下時蓋住某個格子點的次數除以投擲的總次數就是我們的實驗機率。照理來說，實驗機率的值應該近似於我們所推導的理論機率值 $\pi/4$。因此將實驗機率乘以四倍就得到π 的近似值。如果實驗的次數越多次，則所得 π 的近似值應該越準確。

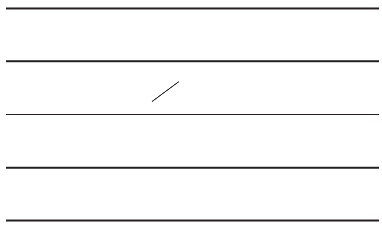
第二則利用機率求 π 的近似值乃是要討論射飛鏢的實驗。



如上圖是一個圓形（半徑為一單位）的飛鏢靶，圓形靶內接一個正方形，此正方形再內接一個正方形（劃有小格線的正方形）。首先我們來討論將飛鏢射在圓形靶內部的情形下，飛鏢射中劃有小格線的正方形區域內的理論機率。因為圓形靶的面積為 π；劃有小格線的正方形邊長為 1，所以面積為 1。因此理論機率是 $1/\pi$。

現在我們來討論實驗機率，也就是實際射飛鏢若干次（比如一千次）後，飛鏢射中劃有小格線的正方形區域內的次數除以飛鏢射中圓形靶的總次數就是我們的實驗機率。因此任意的射飛鏢（不能請神射手來射）也可以被用來算 π 的近似值。

最後要舉的例子是一個很有名的擲針實驗。拋擲一根單位長度的針於劃滿了橫線的平面上（兩相鄰橫線間的距離為兩單位長），計算投擲次數，並計算針觸碰到橫線的次數。數學家發現針觸碰到橫線的理論機率剛好是 π 的倒數。



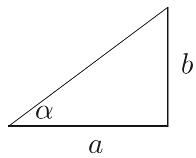
如果你動手拋擲一千次，則配合上我們的理論機率，就可以得到 π 的一個近似值。

在 1855 年時，數學家史密斯做了 3204 次的實驗得到近似值 $\pi \doteq 3.1412$。

1.3 π 與三角函數

$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}\text{。}}$

上一節是討論機率與 π 的關係。這節則是要討論 π 與三角函數之間的關係。在討論之前，先定義符號 $\tan^{-1} b/a$（其中 a, b 是正實數）代表如下直角三角形的角 α（徑度）。



例如

$$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

首先推導我們三角恆等式

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}. \tag{1.1}$$

令 $\alpha = \tan^{-1} 1/2, \beta = \tan^{-1} 1/3$。由定義得到 $\tan\alpha = 1/2, \tan\beta = 1/3$，根據三角公式得到

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

由此計算得到公式 (1.1)。其次我們再來證明三角恆等式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \tag{1.2}$$

令 $\alpha = \tan^{-1} 1/5, \beta = \tan^{-1} 1/239$。由定義得到 $\tan\alpha = 1/5, \tan\beta = 1/239$，根據三角公式得到

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12},$$

$$\tan(4\alpha) = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

再根據三角公式得到

$$\tan(4\alpha-\beta)=\frac{\tan 4\alpha-\tan\beta}{1+\tan 4\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=1.$$

因此證得公式 (1.2).

根據三角函數的定義知道：當角度（徑度）α 很小時，$\sin\alpha$ 的值很接近 α；而 $\cos\alpha$ 的值很接近 1。由此知道 $\tan\alpha$ 的值很接近 α。因此得到

$$\tan^{-1}\alpha \doteq \alpha, \quad \text{（當 } \alpha \text{ 很小時）}. \tag{1.3}$$

現在組合公式 (1.1) 與 (1.3) 得到

$$\frac{\pi}{4}\doteq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Rightarrow\pi\doteq 3.3333.$$

組合公式 (1.2)與 (1.3) 得到較精密的估算

$$\frac{\pi}{4}\doteq 4\times\frac{1}{5}-\frac{1}{239}\Rightarrow\pi\doteq 3.1833.$$

由此知道：找到好的三角恆等式對 π 的估算是很有幫助的。 ⊠

習題 **1.1** 利用圓外切、內接正八邊形的不等式來估計 π 的範圍。

習題 **1.2** 利用圓外切、內接正五邊形的不等式來估計 π 的範圍。

習題 **1.3** 甲、乙兩人分別拿出紙筆，個別依序隨機的（或任意的）寫出三十個正整數。然後將兩人寫的數字依照順序配成三十個序對，再數數看共有幾對序對的兩個正整數互質。並與理論上的機率 $6/\pi^2$ 比對，是否符合。

習題 **1.4** 這是一則有關 π 與機率的有趣實驗。將一張白紙劃成棋盤狀，棋盤的每一格都是單位長度的正方格。拿一根單位長度的針隨意的投擲在白紙上，計算整個針掉落在其中一個方格內的機率（可先嘗試投擲一百次算算看）。將得到的機率與 $(\pi-3)/\pi$ 做比較，是否接近。

習題 **1.5** 試計算複數 $(3+i)^2(7+i)$。並利用計算結果求 π 的近似值。（這是尤拉在 1779 年時所使用的方法）

習題 **1.6** 試證明：

$$\frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{3}{79}.$$

並利用此方程式求 π 的近似值。（這是尤拉在 1755 年時所使用的方法）

動手玩數學

設 S_n 代表單位圓內接正 n 邊形的邊長；T_n 代表單位圓外切正 n 邊形的邊長。試證明

(1)
$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}.$$

(2)
$$\left(4 - S_n^2\right)\left(4 + T_n^2\right) = 16.$$

挑戰題

哈雷在他的好朋友牛頓的協助之下，成功的計算出一顆慧星（就是有名的哈雷慧星）將於 1758 年光臨地球，而且這是那世紀唯一的一次光臨，同時他們也算出下世紀也僅會光臨一次。事實上，中國的天文學家早已注意哈雷慧星很久，翻開歷史記錄得知：此顆慧星在第十四及十七世紀時，分別光臨地球兩次；但是在第十一及十二世紀時，哈雷慧星分別僅光臨地球一次而已。你能根據這些資料，算出哈雷慧星的週期嗎？（註：哈雷慧星的週期剛好是整數年，第十一世紀是指西元 1001 年至西元 1100 年）

π 的小檔案

阿基米德是歷史上對圓周率進行較精密估計的第一人；至於歐基里得所著的幾何原本，則不曾對圓的面積及圓周率進行過計算。在 1737 年時，尤拉將圓周率用 π 這個符號來表示，之後符號 π 的用法才流行起來。就歷史的記載而言，π 的歷史可追朔到 3,500 年前，埃及人在萊茵紙稿上就曾提出求圓面積的方法。阿基米德是利用外切與內接正多邊形來求取 π 的近似值。他得到的近似值是

$$\frac{195882}{62351} > \pi > \frac{211872}{67441} \quad \text{或} \quad 3.1416016 > \pi > 3.1415904.$$

中國的數學家祖沖之（第五世紀）也是用多邊形的方法得到

$$3.1415926 > \pi > 3.1415927.$$

在十七世紀時，德國數學家魯道夫使用阿基米德的方法計算 π 正確到 35 位小數。他深深的以他自己的成就為榮，因此，在遺囑中要求在其墓碑上刻上他所求的結果。今日在德國，π 被稱為魯道夫數。這大概也是使用阿基米德的方法來計算 π 的極限了。

約兩百年前蒲豐（法國數學家）做了一個有關 π 與機率的有趣實驗。他拋擲一根單位長度的針於劃滿了橫線的平面上（兩相鄰橫線間的距離為兩單位長），計算投擲次數，並計算針觸碰到橫線的次數。他發現針觸碰到橫線的機率剛好是 π 的倒數。直到今天，仍然有很多 π 與機率的問題被提出來。

十七世紀後半世紀，由於微積分及無窮級數的發展，阿基米德求 π 的方法變成過時。新的方法是將 π 表成一個連分數，無窮的乘積或無窮的級數，例如布龍克爾的

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{\ddots}}}}},$$

瓦里斯發表的

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots ,$$

尤拉及萊布尼茲證明的

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots ,$$

及馬信有關 π 的恆等式

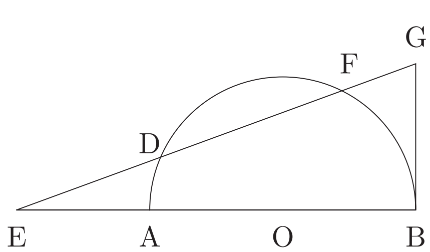
$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

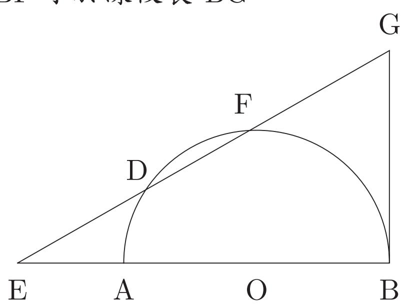
關於“π 不是有理數”是法國數學家蘭伯證明的，數學家勒讓德更在 1794 年時，證明了“π 不是一元二次有理係數方程式的根”。在 1882 年時，德國數學家夫來堡更證明了“π 根本就是一個超越數”。

近代由於電子計算機的發達，使得 π 的估算準確度大大的提高。數學家可以利用電腦計算它至小數點以下幾十萬，甚至幾兆位數了。也有數學家專門研究每個阿拉伯數字在 π 的小數部份出現的機率，一般傾向相信是均勻的。

最後來談史奈斯度圓術：下左圖是一個半圓被線段 EG 割過，其中線段 BG 與直徑 AB 垂直。如果線段長 EA 剛好是半徑，則史奈斯發現：弧長 BF 大於線段長 BG。

下右圖是一個半圓被線段 EG 割過，其中線段 BG 與直徑 AB 垂直。如果線段長 ED 剛好是半徑，則史奈斯發現：弧長 BF 小於線段長 BG。





有關史奈斯的這兩個發現，需要一點極限與微積分的概念才能證明。