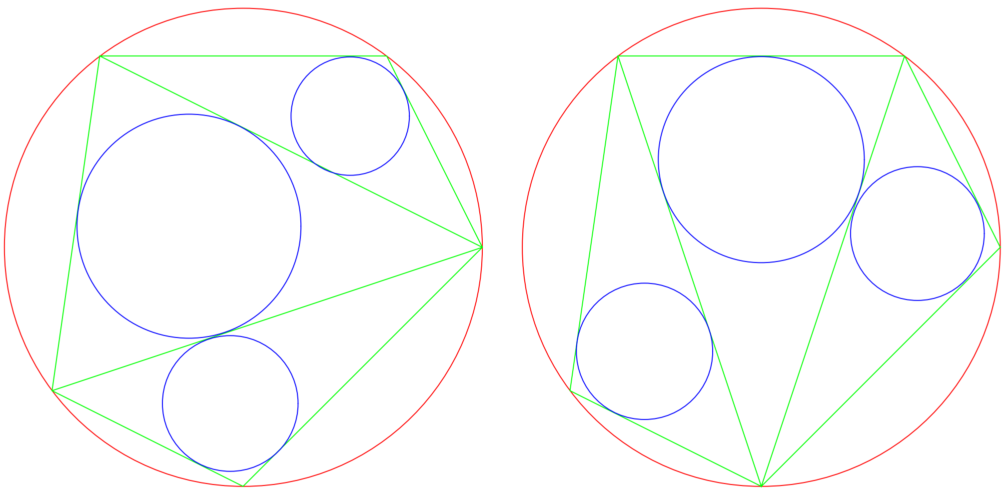
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

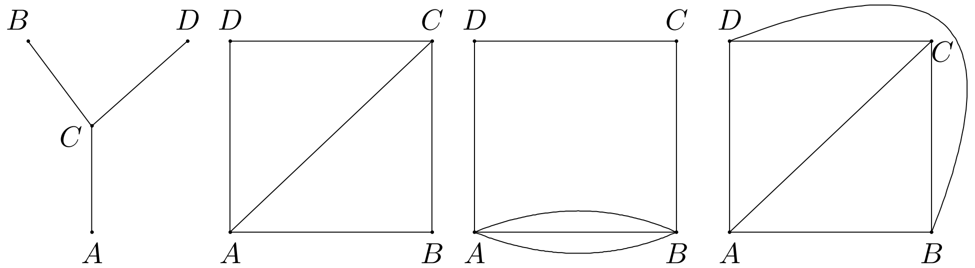
目 錄

1 哈密頓定理

有十個人出席一場宴會，圍繞一圓桌而坐，這些人中，有的彼此認識，有的卻完全不認識。如果希望這十個人圍繞圓桌而坐的方式至少要：每人的左右鄰座都與他認識，那麼這種圍繞方式是否存在（如何判斷）？事實上，這與哈密頓所思考的一則問題是有關的。

在 1857 年，愛爾蘭數學家哈密頓專注於一個問題：在空間中，一個包含有限個頂點及連結這些頂點的某些邊之圖形當中，在什麼條件之下，可以從一個頂點出發，沿著所連結的邊通過所有的頂點一次，最後再回到原出發的頂點，而形成一封閉的迴路？為了紀念這位偉大的數學家，像這種所有頂點恰好通過一次，最後又回到原本出發頂點的迴路，就稱為哈密頓迴路（要注意的是哈密頓迴路並非一定要走過所有連結的邊，但一定要通過所有的頂點一次）。

在我們認識哈密頓迴路之前，我們先來看有關圖的知識：在空間中任取有限個點（稱這些點為頂點），連結兩個相異頂點的路徑叫做一條邊。如果從這些頂點中去畫出一些邊，就把這個含頂點及這些邊的幾何結構叫做一個圖；例如下圖（一）到圖（四）都是圖。



圖（一）　圖（二）　圖（三）　圖（四）

在一個圖中，如果任意兩個相異點至多連結一條邊，就把這個圖稱為簡單圖。例如圖（一）、（二）及圖（四）都是簡單圖；而圖（三）不是簡單圖。從一個頂點畫出去的總邊數，稱為這個頂點的連結數。例如在圖（二）中，頂點 A 的連結數為 3, 而圖（三）中頂點 A 的連結數為 4。在一個圖中，從一個頂點出發，沿著邊通過所有的頂點一次，最後再回到原出發的頂點，而形成一封閉的迴路，這種迴路就叫做哈密頓迴路。例如圖（四）中的迴路

$$A \to B \to C \to D \to A, A \to C \to B \to D \to A$$

都是哈密頓迴路。在什麼條件之下，一個圖一定有哈密頓迴路呢？下面的定理可以告訴我們。

定理 **1.1** (哈密頓定理) 在一個包含有 $n\ (n \geq 3)$ 個頂點的簡單圖中。若每個頂點的連結數都 $\geq \frac{n}{2}$，則此簡單圖一定有哈密頓迴路。

在圖（四）中，頂點數 $n = 4$ 且每個頂點的連結數都是 $3 \geq 2 = \frac{4}{2}$，所以可以找到哈密頓迴路。而圖（一）顯然沒有哈密頓迴路。關於哈密頓定理的證明是採用 1958 年

內曼的證法，略作改進而來。茲證明如下：

【證明】我們把簡單圖中的每個頂點想成是一個人；而連接相異點之間的邊就想做這兩個人是彼此認識。現在哈密頓定理便可以翻譯成如下的性質：一個宴會中有 n 個人，且每個人至少（含）認識 $\frac{n}{2}$ 個人。那麼可以將這 n 個人繞圓桌而坐，使得每個人的左右鄰座一定坐他所認識的人。將此 n 個人繞圓桌而坐，會產生 n 個空隙（註：相鄰而坐的兩人之間的位置稱為一個空隙）。如果相鄰而坐的兩人是認識的則稱這空隙為好空隙，反之稱為壞空隙。將 n 個人繞圓桌而坐的各種坐法中，一定有一種坐法使得壞空隙是最少的（好空隙是最多的）。假設這種坐法的壞空隙數為 k，並將此種繞圓桌而坐的方式用直線呈現如下：

$$A_1A_2\cdots\cdots A_nA_1 \quad (n \text{ 個人繞圓桌而坐}).$$

(1) 若 $k=0$，則代表這種坐法的壞空隙數為零，即每個人的旁邊一定是坐他所認識的人。

(2) 若 $k\geq 1$，則代表這種坐法的壞空隙數至少是 1 以上。不妨假設 A_1 與 A_2 兩人之間的空隙就是一個壞空隙（即兩人不認識）。我們首先證明：這種最少壞空隙數的坐法不可能發生如下的直線排列：

$$A_1A_2\cdots A_1'A_2'\cdots A_nA_1,$$

其中 A_1' 與 A_1 認識且 A_2' 與 A_2 認識。假設發生了如上的坐法，我們可以將 $A_2\cdots A_1'$ 的部分倒過來坐，即 A_2 與 A_1' 互換他們的位置，A_2 右邊的人與 A_1' 左邊的人互換位置等等。如此就會產生下列的坐法：

$$A_1A_1'\cdots A_2A_2'\cdots A_nA_1.$$

因為 A_1, A_1' 是認識且 A_2, A_2'; 也認識，所以這種坐法所產生的壞空隙數 $\leq k-1$，與假設 k 是最小的不合。因此在最少壞空隙數的坐法中，如果 $A_i\ (i\geq 3)$ 與 A_1 認識，則 A_{i+1}（或 A_i 右邊第一位）與 A_2 不認識。由定理的已知及 A_2 與 A_1 不認識知道：

$$A_3\cdots A_n$$

這 $n-2$ 人中至少有 $\frac{n}{2}$ 個人與 A_1 認識，而這些人的右邊第一位都與 A_2 不認識。所以至少有

$$\frac{n}{2}-1$$

個人與 A_2 不認識，即所有 n 個人中，A_2 認識至多

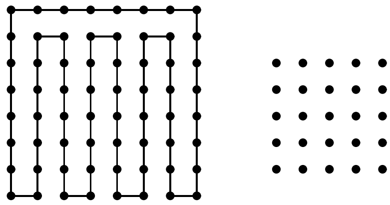
$$(n-2)-\Big(\frac{n}{2}-1\Big)=\frac{n}{2}-1$$

人（這裡的 $n-2$ 是因為 A_1 與 A_2 不認識），此與定理的已知矛盾。因此 $k\geq 1$ 是不可能的。

⊠

動手玩數學

左圖是一個 8×8 的格子點圖。從左下角的點出發，每次只能水平或垂直方向行走。如果每一個點剛好走一次，最後回到原來的出發點，這樣的走法叫做哈密頓走法。左圖就是一種哈密頓走法。如果把格子圖改成 5×5。試問：是否可以找到一種哈密頓走法。



挑戰題

空間中有六個相異點，任何四點都不共平面，並將此六點中，任兩相異點作線段。如果將這些線段塗上白色或黃色的油漆，則可以從六點中找到相異的三點，使此三點所連成的三個邊都是同一種顏色的（稱這種三角形為單色三角形）。是否能更進一步證明：無論你如何塗顏色（仍然限定白、黃二色），這種單色三角形至少可以找到兩個以上。

某籃球鬥牛賽接受高中生當場組隊比賽，但是規定每隊由三人組成且此三人必須兩兩互相認識或者是彼此完全不認識方可組成一隊。若現場有 9 位高中生，則試說明可以組成兩隊進行籃球鬥牛賽。倘若現場僅有 8 位高中生時，那麼是否有辦法組出兩隊進行籃球鬥牛賽呢？

三個字母的排列問題

是否能用 a, b, c 三個字母排成一個無窮字串，例如：

$$abcacb\cdots\cdots$$

使得從這個無窮字串上任意從中間剪下連續的有限個字母，這有限個字母所構成的字串不是循環字串。例如無窮字串：

$$abc\underline{acbacb}\cdots\cdots$$

$$b\underline{cacbcacba}c\cdots\cdots$$

是不符合規定的，因為劃線的部份是循環字串。這個問題的答案是肯定的，在 1940 年時，莫爾和亥浪證明了這種無窮字串的存在性。你是否有能力去造這樣的無窮字串呢？