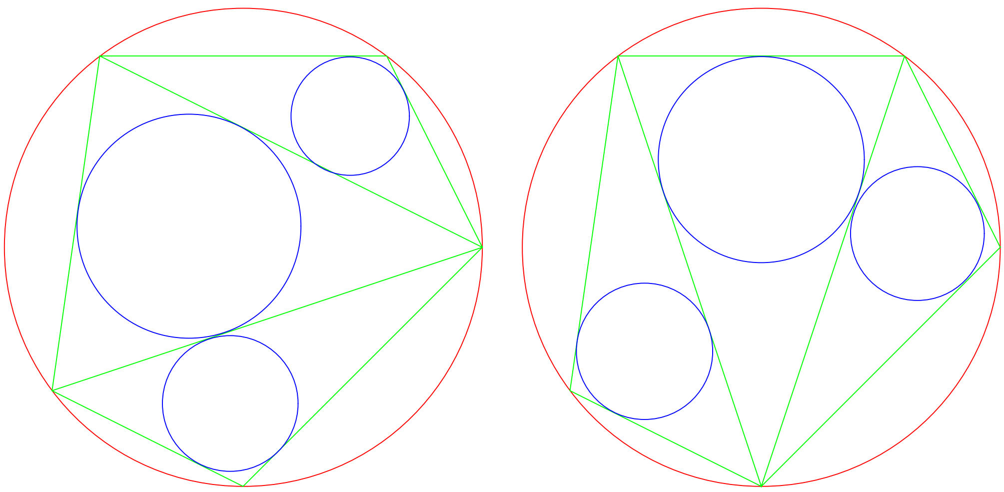
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1　費氏數列

在這節裡，我們要探討一則很重要的數列⋯費氏數列。它不僅在數學上重要，即使是在動植物界、藝術、建築、財經等方面，也扮演著很關鍵的角色。

1.1　二階遞迴數列的通解

定理 **1.1** 若數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足

$$f_{n+2}=af_{n+1}+bf_n,$$

其中 a,b 為實數且令 α_0,β_0 為二次方程式 $x^2=ax+b$ 的兩個相異根。證明：可以找到 α 及 β 使得

$$f_n=\alpha\alpha_0^n+\beta\beta_0^n.$$

【證明】因為 $\alpha_0\neq\beta_0$，所以聯立方程組（把 α,β 當成變數，把 α_0,β_0 當成係數）

$$\begin{cases}\alpha+\beta=f_0\\ \alpha_0\alpha+\beta_0\beta=f_1\end{cases}$$

有唯一的一組解

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta_0f_0-f_1}{\beta_0-\alpha_0},\\ \beta=\dfrac{f_1-\alpha_0f_0}{\beta_0-\alpha_0}.\end{cases}$$

現在利用數學歸納法證明

$$f_n=\alpha\alpha_0^n+\beta\beta_0^n.$$

(1) 當 $n=0,1$ 時，由“唯一的一組解”知道成立。

(2) 設 $n,n+1$ 時，公式成立，即

$$\begin{cases}f_{n+1}=\alpha\alpha_0^{n+1}+\beta\beta_0^{n+1},\\ f_n=\alpha\alpha_0^n+\beta\beta_0^n.\end{cases}$$

由此推得

$$\begin{aligned}f_{n+2}&=af_{n+1}+bf_n\\&=\alpha\alpha_0^n(a\alpha_0+b)+\beta\beta_0^n(a\beta_0+b)\\&=\alpha\alpha_0^n\alpha_0^2+\beta\beta_0^n\beta_0^2\\&=\alpha\alpha_0^{n+2}+\beta\beta_0^{n+2}.\end{aligned}$$

證得本定理。 ⊠

如果二次方程式的兩根相等則情況較為複雜，在此我們舉一個例子說明。

例題 **1.1** 數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足

$$f_0=1,f_1=4;f_{n+2}=6f_{n+1}-9f_n.$$

試求 f_n 的一般公式。

【解】由

$$f_{n+2} = 6f_{n+1} - 9f_n \Rightarrow (f_{n+2} - 3f_{n+1}) = 3(f_{n+1} - 3f_n)$$

推得

$$f_n - 3f_{n-1} = 3(f_{n-1} - 3f_{n-2}) = \cdots = 3^{n-1}(f_1 - 3f_0) = 3^{n-1}.$$

利用等式

$$\begin{aligned} f_n - 3f_{n-1} &= 3^{n-1} \\ f_{n-1} - 3f_{n-2} &= 3^{n-2} \\ &\vdots \\ f_1 - 3f_0 &= 3^0 \end{aligned}$$

推得

$$\begin{aligned} f_n - 3^{n-1} \cdot 3f_0 = & \ (f_n - 3f_{n-1}) + 3(f_{n-1} - 3f_{n-2}) + \cdots + 3^{n-1}(f_1 - 3f_0) \\ = & \ 3^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + 3^{n-1} \\ = & \ n \cdot 3^{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$f_n = (3 + n)3^{n-1}.$$

$\boxtimes$

例題 **1.2** 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_{n-1}} \ (n \geq 1).$$

證明：

(1) a_n 滿足某一遞迴關係。

(2) a_n 恆為（正）整數。

【解】

(1) 由 a_n 的前幾項

$$1, 1, 2, 5, 13, 34, \cdots$$

猜想 a_n 滿足遞迴關係：$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$。現在由題目的假設，推論此猜想成立。由

$$a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 1, \quad a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 1$$

兩式相減得到

$$a_n(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) \ \Rightarrow \ \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n + a_{n-2}}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{1} &= \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\\
&= \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n+a_{n-2}}\cdot\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-3}}\cdots\frac{a_3+a_1}{a_2+a_0}\\
&= \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_2+a_0}\\
&= \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{3}.
\end{aligned}$$

即 $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$。事實上，也可以利用數學歸納法證明這則遞迴關係。

(2) 由 $a_0=a_1=1$ 及遞迴關係 $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$ 馬上得證。

⊠

1.2 費氏數列

例題 **1.3** 費氏數列 $\langle f_n\rangle$ 是指滿足下列條件的數列：

$$f_1=f_2=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n.$$

試將 f_n 表為一般公式。

【解】因為 $x^2=x+1$ 的兩根為

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以由定理 1.1 知道：可以找到 α,β 使得

$$f_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

由 $f_1=1, f_2=1$ 解得

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

因此 f_n 的一般公式為

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

⊠

例題 **1.4** 證明費氏數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足：對每個正整數 n 恆有

$$3\mid f_{4n}.$$

【證明】將費氏數列的前十項列出如下：

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots\cdots.$$

將此數列模 3 得到如下：

$$\overline{1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0}, 1, 1, \cdots\cdots \pmod 3.$$

因為

$$\begin{cases} f_1 \equiv f_9 \equiv 1 \pmod 3, \\ f_2 \equiv f_{10} \equiv 1 \pmod 3, \\ f_{n+2} \equiv f_{n+1} + f_n \pmod 3, \end{cases}$$

所以此數列模 3 後所得的數列 $\{f_n \pmod 3\}$ 是一個循環節為 8 的數列，而且第四項及第八項皆為 3 的倍數。由此得到

$$3 \mid f_{4n}.$$

$\boxtimes$

設 $\langle f_n \rangle$ 是一個整數數列且 N 是一個固定的正整數。如果將數列 $\langle f_n \rangle$ 模 N 之後，所得的同餘數列 $\langle f_n \pmod N \rangle$ 如上例題出現循環現象，則稱數列 $\{f_n\}$ 是一個模 N 的循環數列。循環的最小倍數稱為此模 N 循環數列的循環節，例如上例題的費氏數列模 3 的循環節為 8。

1.3 泰爾克問題

從不等式

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n$$

中挑出一個子不等式

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < \cdots < c_{k-1} < c_k.$$

如果 $c_1, c_3, \cdots$ 為奇數，$c_2, c_4, \cdots$ 為偶數，則稱此子不等式為交錯子不等式。例如

$$1 < 2 < 3$$

的交錯子不等式有下列四個：

$$\begin{aligned} &1, \\ &3, \\ &1 < 2, \\ &1 < 2 < 3. \end{aligned}$$

設 a_n 代表不等式

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n$$

的交錯子不等式的個數。

定理 **1.2** (泰爾克問題) 證明：$a_n = f_{n+2} - 1$, 其中 $\langle f_n \rangle$ 代表費氏數列。

【證明】首先容易計算得到：$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$，所以

$$a_1 + 1 = 2, a_2 + 1 = 3, a_3 + 1 = 5.$$

其次考慮 a_{n-2}, a_{n-1} 與 a_n 之間的關係：設

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k$$

是

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n$$

的一個交錯子不等式。

(1) 當 $c_k < n$ 時，$c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k$ 亦是 $1 < 2 < 3 < \cdots < n-1$ 的一個交錯子不等式。所以這樣的個數恰有 a_{n-1} 個。

(2) 當 $c_k = n, c_1 \geq n-1$ 時，這時僅有兩個子不等式

$$n - 1 < n, n.$$

而上述兩個子不等式中恰有一個是交錯子不等式，所以這樣的個數僅有 1 個。

(3) 當 $c_k = n, c_1 < n-1$ 且 n 為偶數時，分下列兩種情情討論：

   (i) 若 $c_{k-1} = n-1$，則 $c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-2}$ 為不等式 $1 < 2 < 3 < \cdots < n-2$ 的交錯子不等式中，元素個數為偶數的交錯子不等式。

   (ii) 若 $c_{k-1} < n-1$，則 $c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1}$ 為不等式 $1 < 2 < 3 < \cdots < n-2$ 的交錯子不等式中，元素個數為奇數的交錯子不等式。

   綜合 (i), (ii) 這些交錯子不等式的個數恰為 a_{n-2}。同理，若 n 為奇數時，則討論亦同。

綜合 (1), (2), (3) 得到：$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-2}$。由此式整理得到：$a_1 + 1 = 2, a_2 + 1 = 3, (a_n + 1) = (a_{n-1} + 1) + (a_{n-2} + 1)$。因此 $a_n + 1 = f_{n+2}$，即 $a_n = f_{n+2} - 1$。 ⊠

習題 **1.1** 證明費氏數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：對每個正整數 n 恆有

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

習題 **1.2** 證明費氏數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：對每個正整數 n 恆有

$$5 \mid f_{5n}.$$

習題 **1.3** 證明費氏數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：對每個正整數 m, n

(1) $f_{m+n} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}$.

(2) $f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n-1}$.

(3) 若 $n \mid m$，則 $f_n \mid f_m$.

習題 **1.4** 設數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：

$$f_0 = 5, f_1 = 3; 5f_{n+2} = 6f_{n+1} - 5f_n.$$

證明 $\mid f_n \mid \leq 5$。

習題 **1.5** 如果

(1) 數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：

$$f_0 = 1, f_1 = 3; f_{n+2} = 4f_{n+1} - 4f_n.$$

試求 $\langle f_n \rangle$ 的一般公式。

(2) 數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：

$$f_0 = a, f_1 = b; f_{n+2} = 2cf_{n+1} - c^2 f_n.$$

試求 $\langle f_n \rangle$ 的一般公式（以 a, b, c, n 表示）。

習題 **1.6** 設 $\langle f_n \rangle$ 是費氏數列，分別就

(1) $N = 7$

(2) $N = 11$,

求模 N 的循環節。

習題 **1.7** 設數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：f_1, f_2 為整數且 $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$，其中 a, b 亦為整數。如果 N 是一個正整數，試證明 $\langle f_n \rangle$ 是一個模 N 的循環數列（且循環節不大於 N^2）。

習題 **1.8** 求無窮級數和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{10^n},$$

其中 f_n 是費氏數列。

習題 **1.9** 白藍粉刷公司想粉刷他們的 n 層摩天大樓。為了凸顯公司的標誌，限制每層樓只能用白色或者是藍色的油漆來粉刷，而且不能有連續兩層樓都是藍色的。你能幫白藍粉刷公司算算看，他有多少種粉刷方式嗎？

習題 **1.10** 設 $\langle F_n \rangle$ 是費氏數列，第 n 個黃金矩形是指 $F_n \times F_{n+1}$ 的矩形（即長為 F_n 單位、寬是 F_{n+1} 單位的矩形）。試問：不同的黃金矩形是否會相似。

習題 **1.11** 將正整數

$$1, 2, 3, \cdots, n$$

重新排列成一數列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n.$$

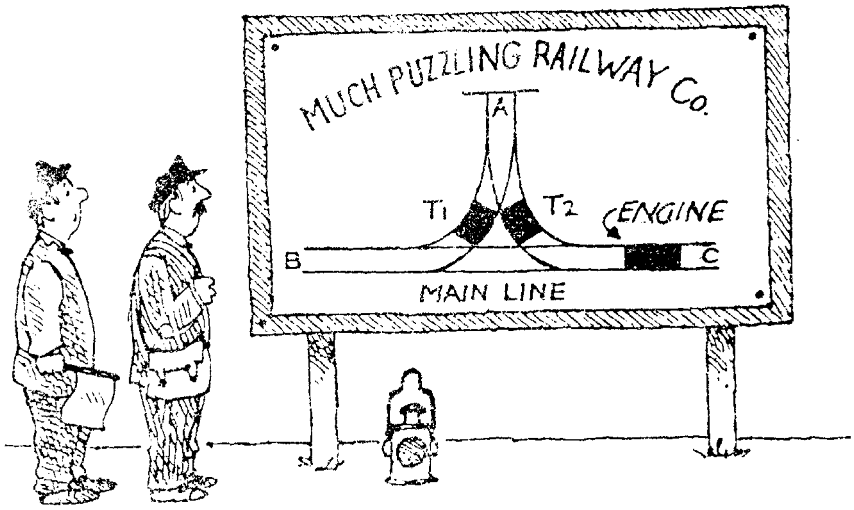
設 F_n 代表滿足

$$i-1 \leq a_i \leq i+1 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

的排法。試求 $F_n =$?

動手玩數學

如下圖：有 T_1、T_2 兩車廂（無動力，其長度比 A 點轉換軌的長度略長）及引擎車 E（有動力）。車廂與車廂或車廂與引擎車接觸時（無論哪一邊接觸），皆可以將它們鏈結在一起；鏈結在一起的也隨時可以解開來，而且無論引擎車推車廂或者是拉車廂時，皆能控制車廂前進的方向。如果想要將 T_1、T_2 兩車廂互換位置，應如何操作。



挑戰題

設數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：

$$f_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \cdot 3^k$$

(1) 證明 $\langle f_n \pmod 5 \rangle$ 是一個循環數列。

(2) 證明

$$5 \mid f_{6n+3}.$$

$\boxed{\text{二次多項式的問題}}$

已知當 $0 \leq n \leq 16$ 時， $n^2 - n + 17$ 皆為質數；而 $n^2 - n + 41$ 在 $0 \leq n \leq 40$ 時亦為質數。最近畢格算出 $n^2 - n + 72491$ 在 $0 \leq n \leq 11000$ 時亦為質數。因此，給定一個正整數 N，是否存在一個質數 p 使得：當 $0 \leq n \leq N$ 時，$n^2 - n + p$ 皆為質數。這是一個很難且尚未解決的問題。