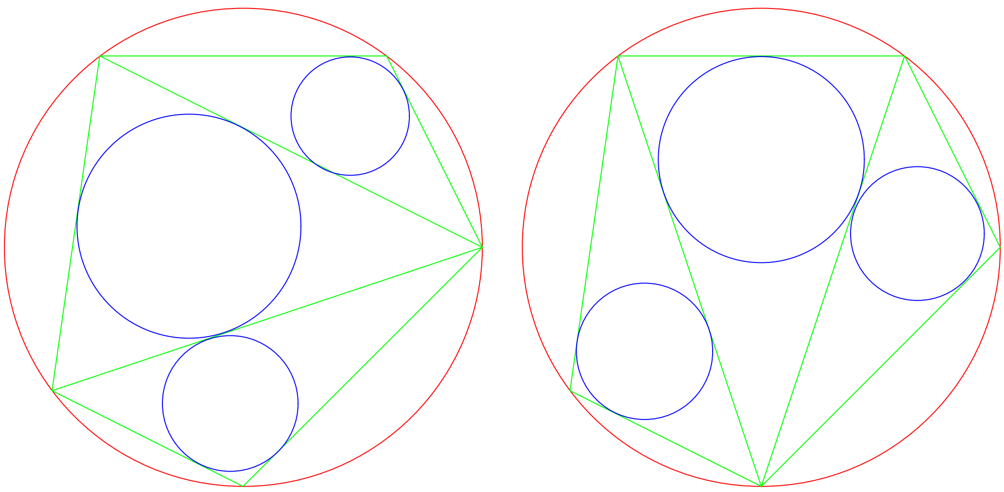
算 術 講 義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 逐步淘汰原理（排容原理）

1.1 逐步淘汰原理（排容原理）

假設 S 是一個有限元素的集合且 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 為 S 的 n 個子集合，那麼逐步淘汰原理或者稱為排容原理是說：

定理 **1.1** (逐步淘汰原理) 在集合 S 內但不屬於子集合

$$S_1, S_2, \cdots, S_n$$

的元素個數恰為

$$\begin{aligned} &| S | - \sum_{1\le i\le n} | S_i | + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} | S_{i_1} \cap S_{i_2} | - \\ &\qquad \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap S_{i_3}| + \cdots + (-1)^n \, |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|, \end{aligned}$$

這裡的符號 $|X|$ 表示集合 X 的元素個數。

【證明】我們只需考慮任一元素 $x \in S$ 在本定理的公式中出現的次數即可。分兩種情形討論如下：

(1) 若 $x \in S$ 且 x 落在至少一個子集合 S_i 內，則此時可令 $x \in S_{i_1}, x \in S_{i_2}, \cdots, x \in S_{i_m}$（其中 $i_1, i_2, \cdots, i_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$），但是當 $i \neq i_1, i_2, \cdots, i_m$ 時，$x \notin S_i$。這時 x 在定理的公式中出現的總次數為

$$1 - m + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0.$$

(2) 若 $x \in S$ 但 $x \notin S_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$，則 x 在本定理的公式中出現的總次數為

$$1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + 0 = 1.$$

綜合 (1)，(2) 證得此原理。 ⊠

例題 **1.1** 試求 1 至 1000 中不被 $2, 3, 5$ 整除的個數。

【解】令 1 至 1000 所構成的集合為 S，且令 S_2, S_3, S_5 分別為集合 S 中 $2, 3, 5$ 的倍數所構成的子集合。因為

$$\begin{aligned} &| S_2 |= 500, | S_3 |= 333, | S_5 |= 200, \\ &| S_2 \cap S_3 |= 166, | S_3 \cap S_5 |= 66, | S_2 \cap S_5 |= 100, \\ &| S_2 \cap S_3 \cap S_5 |= 33, \end{aligned}$$

根據逐步淘汰原理，所求的個數為

$$1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 = 266.$$

⊠

1.2 尤拉函數

如果 n 是一個正整數，尤拉函數 $\phi(n)$ 是指：不大於（超過） n 且與 n 互質的正整數的個數。例如

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= 1,\\
\phi(2) &= 1,\\
\phi(3) &= 2,\\
\phi(4) &= 2,\\
\phi(6) &= 2,\\
\phi(13) &= 12,\\
\phi(15) &= 8.
\end{aligned}$$

為了求尤拉函數 $\phi(n)$ 的一般公式，我們先將正整數 n 因數分解成如下的標準分解式：

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 為相異質數，$n_1, n_2, \cdots, n_l$ 為正整數。根據逐步淘汰原理，“不大於 n 且與 n 互質的正整數的個數”恰為“不大於 n 且不被 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 整除的正整數的個數”。所以得到

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= n - \sum_{i=1}^{l} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le l} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^l \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_l}\\
&= n \left(1 - \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le l} \frac{1}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^l \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_l} \right)\\
&= n \left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right) \left(1 - \tfrac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \tfrac{1}{p_l}\right).
\end{aligned}$$

這是有名的尤拉公式。

定理 **1.2** (尤拉公式) 將正整數 n 因數分解成如下的標準分解式：

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 為相異質數， $n_1, n_2, \cdots, n_l$ 為正整數，則

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= n \left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right) \left(1 - \tfrac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \tfrac{1}{p_l}\right)\\
&= p_1^{n_1-1}(p_1-1) p_2^{n_2-1}(p_2-1) \cdots p_l^{n_l-1}(p_l-1)\\
&= \prod_{i=1}^{l} p_i^{n_i-1}\left(p_i - 1\right).
\end{aligned}$$

⊠

例題 **1.2** 試求滿足 $\phi(n) = 12$ 的所有正整數 n。

【證明】若質數 $p \mid n$ 則由尤拉公式得

$$(p-1) \mid \phi(n) = 12 \Rightarrow p - 1 = 1, 2, 3, 4, 6, 12,$$

因此整除 n 的質數可能值為

$$2, 3, 5, 7, 13.$$

(1) 若 $13 \mid n$，則

$$\begin{cases} \phi(13) = 12 \\ \phi(n) = 12 \\ 13 \mid n \end{cases} \Rightarrow n = 13 \text{ 或 } 2 \times 13.$$

(2) 若 $7 \mid n$，則

$$\begin{cases} \phi(7) = 6 \\ \phi(n) = 12 \\ 7 \mid n \end{cases} \Rightarrow n = 2^2 \times 7 \text{ 或 } 3 \times 7 \text{ 或 } 2 \times 3 \times 7.$$

(3) 若 $5 \mid n$，則

$$\begin{cases} \phi(5) = 4 \\ \phi(n) = 12 \\ 5 \mid n \end{cases} \Rightarrow n \text{ 無解。}$$

(4) 若 $n = 2^a \times 3^b$，則

$$12 = \phi(n) = 2^a \times 3^{b-1} \Rightarrow a = 2, b = 2 \Rightarrow n = 2^2 \times 3^2.$$

因此

$$n = 13,\ \ 2 \times 13,\ \ 3 \times 7,\ \ 2^2 \times 7,\ \ 2^2 \times 3^2,\ \ 2 \times 3 \times 7.$$

⊠

1.3 二階拉丁矩陣

這一節的目的是要舉一個逐步淘汰原理的應用。這個應用很有名，我們稱之為拉丁矩陣。

定理 **1.3** 如下圖：

1	2	$\cdots\cdots$	n
a_1	a_2	$\cdots\cdots$	a_n

數字 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 滿足

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

且 $a_i \neq i$。試問共有多少種排列方法。

【解答】將 $1,2,3,\cdots,n$ 放入下排的方格中（即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 剛好是 $1,2,\cdots,n$）的排法剛好有 $n!$ 種。現在假設 D_i 代表這些排法中， $a_i=i$ 的方法數，$D_{12\cdots i}$ 代表這些排法中，$a_1=1,a_2=2,\cdots,a_i=i$ 的方法數。容易計算得到

$$\begin{aligned} D_1 &= (n-1)!, \\ D_{12} &= (n-2)!, \\ D_{123} &= (n-3)!, \\ &\vdots \\ D_{12\cdots i} &= (n-i)!. \end{aligned}$$

根據逐步淘汰原理，我們所要算的方法數為

$$n! - \sum_{i=1}^{n} D_i + \sum_{1\le i<j\le n} D_{ij} - \cdots + (-1)^n D_{12\cdots n}.$$

計算得到

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!.$$

化簡得到

$$n! - n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).$$

⊠

習題 **1.1** 試求 1 至 10000 中非 $2,3,5,7$ 的倍數的個數。

習題 **1.2** 設 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 為正數且令

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

證明[1]

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) \le 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

習題 **1.3** 試求滿足 $\phi(n)=36$ 的所有正整數 n。

習題 **1.4** 若正整數 $n\ge 19$，試求 $\phi(n)$ 的最小值。

動手玩數學

1957 年於陝西西安市元代安西王府遺址出土。幻方鐵板上每行均由六個數字排列，組成方陣，不論縱行或橫行，或對角線上的數字，相加之和都是 111。這個蘊含著數學原理的六六幻方（魔方陣），在古代被視為奇妙的神秘之物。人們把它鄭重地裝進石函，埋入房基中，用作鎮宅和防災避邪的吉祥物。今幻方鐵板中有八個位置的數字已經無法辨識，你能幫史學家修補好這珍貴的元代幻方鐵板嗎？

[1]可採用逐步淘汰原理的證明模式。

28	4	3	31	35	10	元
36			24	11	1	代
7		12		22	30	幻
8				16	29	方
5	20	15	14	25	32	鐵
27	33	34	6	2	9	板

幻方鐵板的出土地點在今天西安火車站東北三公里處，是元代安西王府的遺址。安西王府是忽必烈的三兒子忙哥剌的王宮。

卡邁克爾猜想

我們常用尤拉函數 $\phi(n)$ 代表：不大於 n 且與 n 互質的正整數個數。例如

$$\phi(1)=1, \phi(2)=1, \phi(6)=2, \phi(4)=2, \phi(12)=4, \cdots .$$

卡邁克爾猜想是說：是否存在正整數 n，使得任何不等於 n 的正整數 m 皆有 $\phi(m) \neq \phi(n)$。

一般猜想這樣的正整數 n 是不存在的；至少在

$$n \leq 10^{10000}$$

時，這樣的正整數 n 是不存在的。

另一個與尤拉函數相關的猜想是這樣的：是否存在合成數（非質數）n 滿足

$$\phi(n) \mid (n-1).$$