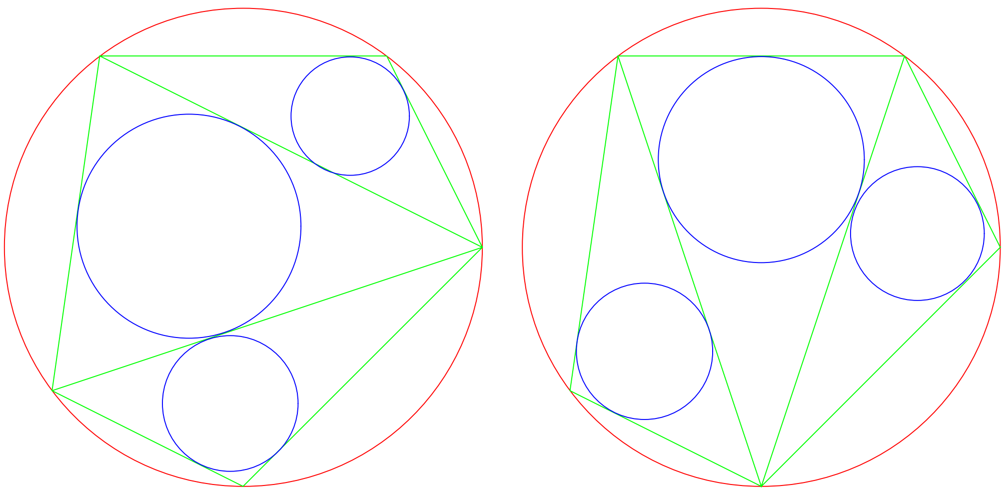
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 高斯五邊形定理…稀少，但成熟 **1**

1.1 矩形定理 1

1.2 Monge 公式 2

1.3 高斯五邊形定理 3

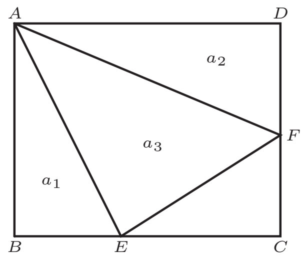
1 高斯五邊形定理⋯稀少，但成熟

“稀少，但成熟”是數學王子高斯的座右銘，高斯不僅是許多重要數學理論的原創者，在數論，算術與代數，實變與複變分析，機率論及平面幾何上，仍有許多高斯發現的小定理，正十七邊形可以尺規作圖就是一例。

在這裡，我們想介紹較少為人所知的另一個定理⋯高斯五邊形定理。這個定理跟古希臘的托勒密定理是等價的，也等價於接下來要介紹的 Monge 公式。 在介紹 Monge 公式與高斯五邊形定理之前，先談一個比較簡單的類似定理。

1.1 矩形定理

例題 **1.1** 如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 A 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

〔證明〕令 $BE = x, EC = y, DF = a, FC = b$，由

$$A + (a+b)(x+y) = 2A = 2(a_1 + a_2 + a_3) + by$$

知

$$A + ax + ay + bx + by = (a+b)x + a(x+y) + by + 2a_3.$$

整理得

$$A = ax + 2a_3.$$

故

$$\begin{aligned} A^2 &= axA + 2a_3A \\ &= x(a+b)a(x+y) + 2a_3A \\ &= (2a_1)(2a_2) + 2a_3A, \end{aligned}$$

即

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

⊠

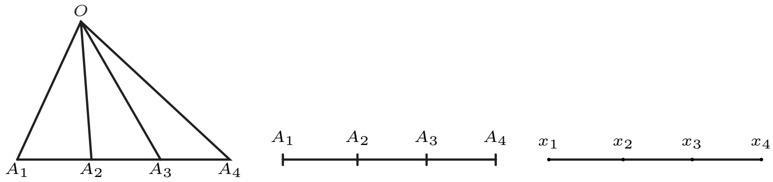
例題 1.1 是說，矩形面積 A 是以 a_1, a_2, a_3 為係數的二次方程式

$$x^2 - 2a_3x - 4a_1a_2 = 0$$

的一根。

1.2 Monge 公式

例題 **1.2** 〈圖一〉中的 A_2, A_3 是三角形 OA_1A_4 邊 A_1A_4 上的兩個點，〈圖二〉中的 A_1, A_2, A_3, A_4 是線段上的四個點，〈圖三〉中的 x_1, x_2, x_3, x_4 是數線上的四個點座標。



〈圖一〉 〈圖二〉 〈圖三〉

證明底下三個等式成立：

$$\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4;$$
$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4;$$
$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2).$$

〔證明〕如果令 $\triangle OA_1A_2 = p, \triangle OA_2A_3 = q, \triangle OA_3A_4 = r$，那麼第一個等式就相當於證明式子

$$pr + q(p + q + r) = (p + q)(q + r)$$

成立。但是它是一則恆等式，故一定相等。

將第一個等式的三角形面積用基本面積公式

$$\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$$

代入，因為它們的高都一樣，所以得到第二個等式成立。

將第二個等式中的線段長度改成數線上的座標相減得到第三個等式。 ☒

事實上，上述三個恆等式與下列三角恆等式等價：

例題 **1.3** 若 α, β, γ 是任意三個角，則證明三角恆等式

$$\sin\alpha \sin\gamma + \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma).$$

〔證明〕在這裡提供兩種不同的解法：

〔解一〕利用例題 1.2 的結果，令 $\angle A_1OA_2 = \alpha, \angle A_2OA_3 = \beta, \angle A_3OA_4 = \gamma$。將等式

$$\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4$$

換成面積公式得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}OA_1OA_2\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}OA_3OA_4\sin\gamma\\&+\frac{1}{2}OA_2OA_3\sin\beta\cdot\frac{1}{2}OA_1OA_4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\\&=\frac{1}{2}OA_1OA_3\sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{2}OA_2OA_4\sin(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

將兩邊同時除以 $\frac{1}{4}OA_1OA_2OA_3OA_4$ 得到

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔解二〕利用三角學的積化和差與和差化積公式，得到

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\\&=-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\gamma)\\&\quad-\frac{1}{2}\cos(\alpha+2\beta+\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma)\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[-2\sin\frac{(\alpha-\gamma)+(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\gamma)-(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\right]\\&=-\sin(\alpha+\beta)\sin(-\beta-\gamma)\\&=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

$\boxtimes$

例題 **1.4** (Monge 公式) 設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 是凸五邊形，令 $\pi_{ij}(1\le i,j\le 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積。證明

$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

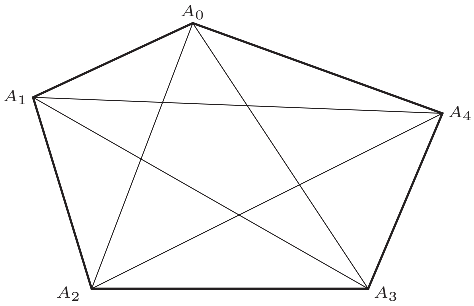
〔證明〕令 $\angle A_1A_0A_2=\alpha,\angle A_2A_0A_3=\beta,\angle A_3A_0A_4=\gamma$，利用三角函數的面積公式得到

$$\begin{aligned}&\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}\\&=\frac{1}{2}A_0A_1\times A_0A_2\times A_0A_3\times A_0A_4\left[\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\right]\\&=\frac{1}{2}A_0A_1\times A_0A_2\times A_0A_3\times A_0A_4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\\&=\pi_{13}\pi_{24}.\end{aligned}$$

$\boxtimes$

1.3 高斯五邊形定理

設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 為凸五邊形，三角形 $A_4A_0A_1$ 的面積為 a_0， $A_0A_1A_2$ 的面積為 a_1，$A_1A_2A_3$ 的面積為 a_2，$A_2A_3A_4$ 的面積為 a_3， $A_3A_4A_0$ 的面積為 a_4。



高斯證明五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積可以表成 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 的公式， 這就是有名的高斯五邊形面積公式：

定理 **1.1** 若令 A 是五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積，常數 c_1, c_2 定為

$$c_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$

$$c_2 = a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0,$$

則五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積 A 會滿足二次方程式

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

〔證明〕令 $\pi_{ij}(1 \leq i, j \leq 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積，則

$$\pi_{12} = a_1;$$

$$\pi_{34} = a_4;$$

$$\pi_{14} = a_0;$$

$$\pi_{23} = A - a_1 - a_4;$$

$$\pi_{13} = A - a_2 - a_4;$$

$$\pi_{24} = A - a_1 - a_3.$$

利用Monge 公式得

$$a_1a_4 + a_0(A - a_1 - a_4) = (A - a_2 - a_4)(A - a_1 - a_3),$$

整理得

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

⊠

想想看高斯問題的變形：如果令三角形

$$A_0A_2A_3, A_1A_3A_4, A_2A_4A_0, A_3A_0A_1, A_4A_1A_2$$

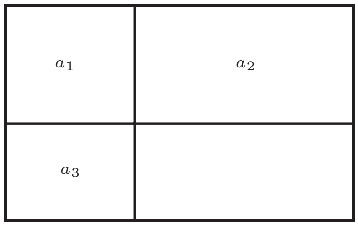
的面積依序為

$$a, b, c, d, e,$$

那麼五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積是否也可以表成以 a, b, c, d, e 為係數的二次方程式呢？類似這樣的問題就有很多可以探討了，甚至可以探討六，七，八，⋯邊形的情形。

思考問題

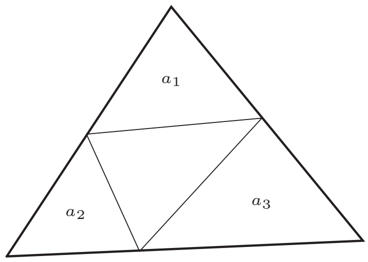
1 如下圖所示，面積為 A 的大矩形，被分割成四個小矩形，其中 a_1, a_2, a_3 為所在小矩形區域的面積。



證明

$$a_1(A - a_1) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

2 如下圖所示，三角形的面積為 A，三個角落的面積為 a_1, a_2, a_3：



試求 A, a_1, a_2, a_3 的關係。