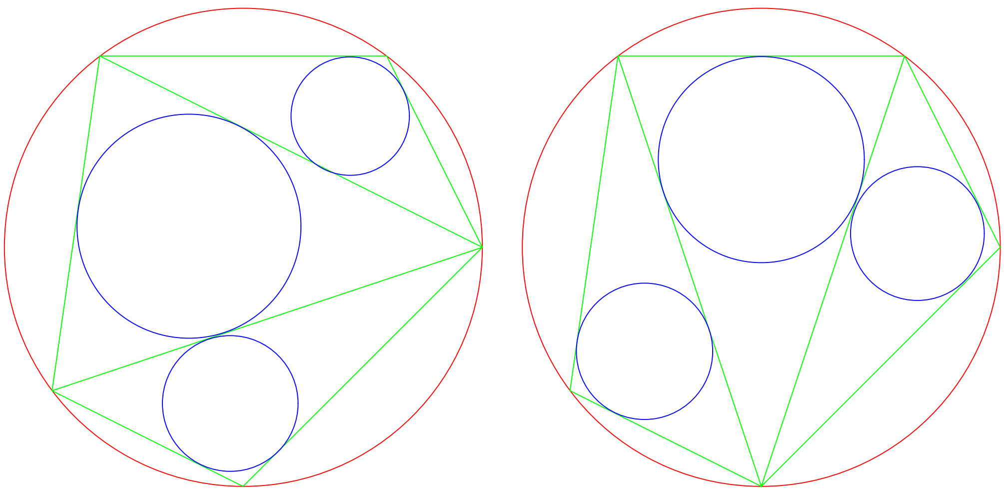
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

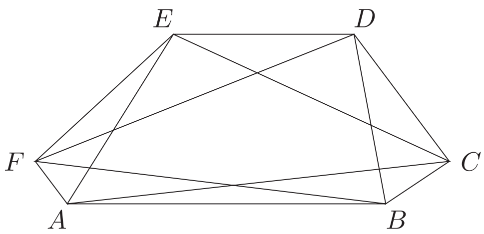
目 錄

1 一題多解的幾何問題

在這裡，我們將針對兩則幾何問題提出多種不同的解法，讓讀者耳目一新。特別是第二則幾何問題，在一般的幾何書籍上容易發現，但是它的解法大致只有一種。在此提供其它解法供各位欣賞。

1.1 平行六邊行問題

定理 **1.1** 下圖是一個平行六邊形，即 AB 與 DE 平行， BC 與 EF 平行，CD 與 FA 平行。試證：三角形 ACE 與三角形 BDF 的面積相等。



【證一】把 $ABCDEF$ 中所有對角線都連接起來得到：

$$
\begin{aligned}
&\triangle ACE\\
&\quad = ABCDEF - \triangle AEF - \triangle ABC - \triangle CDE\\
&\quad = ABCDEF - (ABEF - \triangle ABE) - (ABCD - \triangle CDA) - (CDEF - \triangle CEF)\\
&\quad = ABCDEF - (ABEF + ABCD + CDEF) + \triangle ABE + \triangle CDA + \triangle CEF;\\
&\triangle BDF\\
&\quad = ABCDEF - \triangle BCD - \triangle DEF - \triangle FAB\\
&\quad = ABCDEF - (ABCD - \triangle ABD) - (CDEF - \triangle CDF) - (ABEF - \triangle BEF)\\
&\quad = ABCDEF - (ABEF + ABCD + CDEF) + \triangle ABD + \triangle CDF + \triangle BEF.
\end{aligned}
$$

因為

$$AF//CD,\ \ AB//DE,\ \ BC//EF,$$

所以（同底等高）

$$\triangle CDA = \triangle CDF,\ \ \triangle ABE = \triangle ABD,\ \ \triangle CEF = \triangle BEF.$$

綜合這些等式證得：三角形 ACE 與三角形 BDF 的面積相等。

【證二】如下圖所添的補助線得知：針對梯行 $ABDE$，我們得到

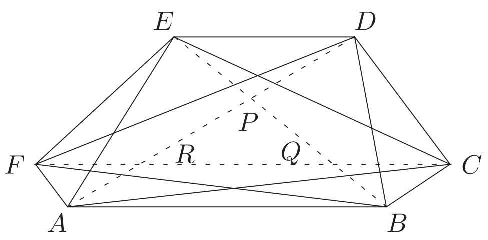
$$\triangle APE = \triangle BPD.$$

同理有

$$\triangle BQF = \triangle CQE, \quad \triangle ARC = \triangle DRF.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\triangle ACE &= \triangle ARC + \triangle APE + \triangle CQE + \triangle PQR \\ &= \triangle DRF + \triangle BPD + \triangle BQF + \triangle PQR \\ &= \triangle BDF.\end{aligned}$$



【證三】如下圖：將平行六邊形 $ABCDEF$ 向外延長成三角形 MNO。因為

$$BC//NO, \quad AF//OM, \quad ED//MN,$$

所以可以令

$$\frac{MB}{MN} = \frac{MC}{MO} = \frac{a}{1},$$
$$\frac{NA}{MN} = \frac{NF}{NO} = \frac{b}{1},$$
$$\frac{OE}{ON} = \frac{OD}{OM} = \frac{c}{1}.$$

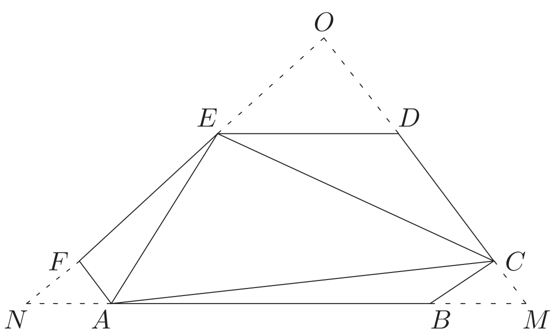
由此得到

$$\begin{aligned}\triangle ACE &= \triangle MNO - \triangle MAC - \triangle NAE - \triangle OCE \\ &= (1 - a(1-b) - b(1-c) - c(1-a))\triangle MNO \\ &= (1 - a - b - c + ab + bc + ca)\triangle MNO.\end{aligned}$$

同理可得

$$\triangle BDF = (1 - a - b - c + ab + bc + ca)\triangle MNO,$$

得證。



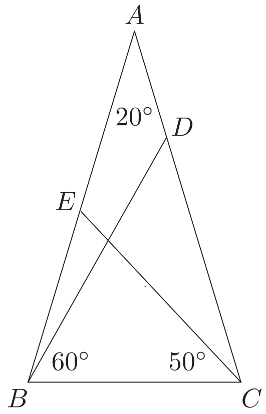
⊠

1.2 求角度問題

定理 **1.2** 如下圖：三角形 ABC 是一個等腰三角形且

$$\angle A = 20°, \angle DBC = 60°, \angle ECB = 50°.$$

試求 $\angle EDB = ?$



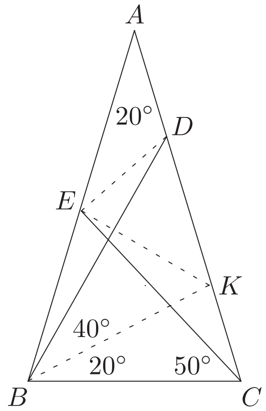
【解一】如下圖，在 AC 上取一點 K 使得 $\angle KBC = 20°$。

(1) $BK = BC$。
這是因為 $\angle BKC = 180° - 20° - 80° = 80° = \angle BCK$。

(2) 三角形 KBE 為正三角形。
由 $\angle CEB = 180° - 80° - 50° = 50° = \angle BCE$ 得 $BC = BE$，又 $\angle KBE = 80° - 20° = 60°$。綜合得到：三角形 KBE 為正三角形。

(3) $KB = KD$。
由 $\angle KDB = \angle CDB = 180° - 60° - 80° = 40° = \angle KBD$ 得到

(4) B, E, D 在以 K 為圓心，KD 為半徑的圓上。因此，圓周角 $\angle EDB = \frac{1}{2}\angle EKB = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$。



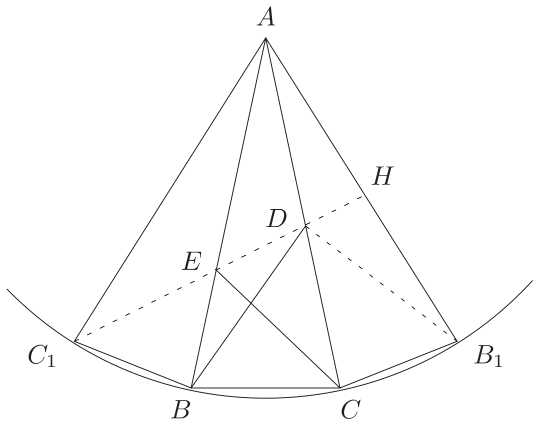
【解二】如下圖，以 A 為圓心，AB 為半徑畫一個弧，並在此等腰三角形 ABC 的

左右各劃相等的三角形 AC_1B 與 ACB_1。取 H 為線段 AB_1 的中點。（注意：此時 C_1E, ED, DH 是三條線段，不一定在同一直線上，我們將證明：C_1, E, D, H 四點共線）

(1) 三角形 AC_1B_1 為正三角形。
這是因為 $\angle C_1AB_1 = 3\angle BAC = 60^\circ$ 及 $AC_1 = AB_1$。

(2) 點 C_1, E, D, H 四點共線，且 $C_1H \perp AB_1$。
因為 H 是 AB_1 的中點，且三角形 AC_1B_1 為正三角形，所以直線 C_1H 垂直且平分線段 AB_1（亦平分 $\angle AC_1B_1$）。因為 $\angle AC_1E = \angle ACE = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$，所以 E 在直線 C_1H 上。針對三角形 ADB，因為 $\angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle DAB$，所以 $AD = DB = DB_1$。因此，D 亦在 C_1H 上。

(3) $\angle EDB = 30^\circ$。
針對三角形 C_1DB：因為 $\angle DC_1B = \angle ECB = 50^\circ, \angle DBC_1 = \angle EBC_1 + \angle DBE = 80^\circ + (80^\circ - 60^\circ) = 100^\circ$，所以 $\angle EDB = 180^\circ - 50^\circ - 100^\circ = 30^\circ$。



【解三】針對三角形 EBC，因為 $\angle CEB = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ = \angle BCE$，所以 $BE = BC$。設 $\angle EDB = \theta$。那麼 $\angle BED = 160^\circ - \theta$。針對三角形 BED 及三角形 BCD，由正弦定理知道：

$$\frac{BD}{\sin(160^\circ - \theta)} = \frac{BE}{\sin\theta}, \quad \frac{BD}{\sin 80^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ}.$$

因為 $BE = BC$，所以

$$\frac{\sin(160^\circ - \theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = 2\cos 40^\circ.$$

利用和角公式得到

$$\sin 20^\circ \cos\theta + \cos 20^\circ \sin\theta = 2\cos 40^\circ \sin\theta.$$

所以

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{2\cos(60^\circ - 20^\circ) - \cos 20^\circ}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

由此得到 $\theta = 30^\circ$。 ⊠

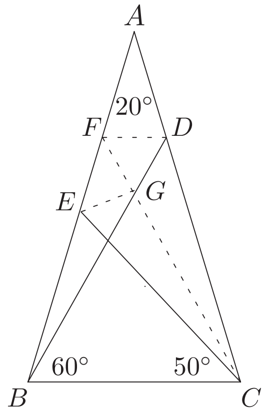
習題 **1.1** 巧添如下的補助線之後，試完成：

(1) 三角形 GFD 與 GBC 是正三角形。

(2) 三角形 BEC, BEG 與 EFG 是等腰三角形。

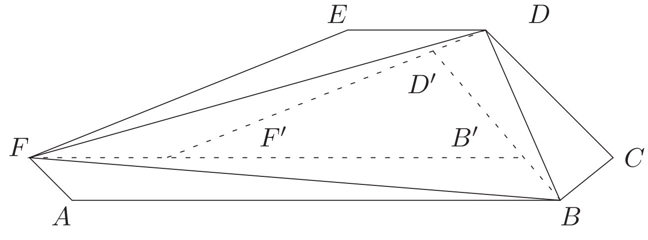
(3) 三角形 EFD 與 EGD 全等。

(4) 計算 $\angle EDB = ?$



$\boxed{\text{動手玩數學}}$

如下圖：虛線分別與平行六邊形的邊平行。試將三角形 BDF 的面積以六邊形 $ABCDEF$ 及三角形 $B'D'F'$ 的面積來表示，並依此方式證明定理 1.1（提示：考慮 $B'D', D'F', F'B'$ 的長度）。



$\boxed{\text{挑戰題}}$

三角形 ABC 是一個等腰三角形且 $\angle A = 20^\circ, AB = AC$。$P$ 是 AC 上滿足 $AP = BC$ 的一點。試求 $\angle PBC = ?$（模仿【解二】的方法）