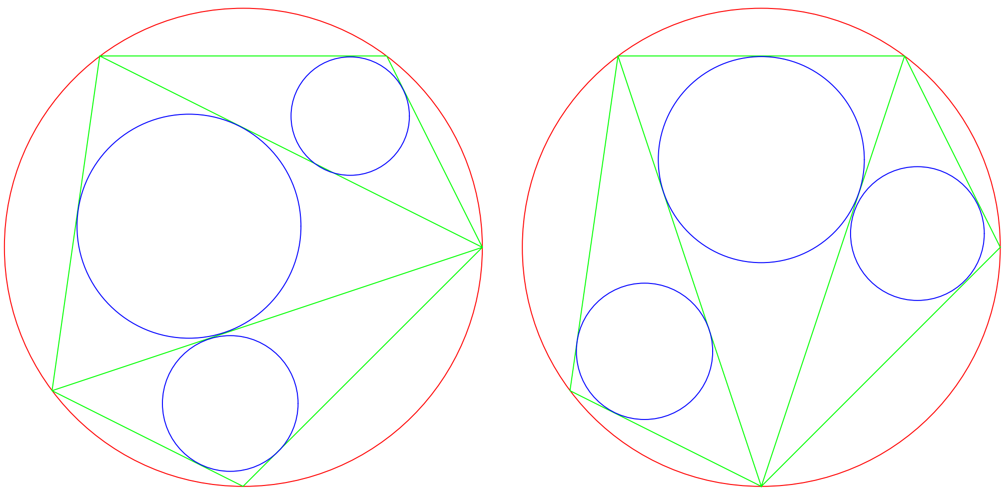
# 算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

# 目 錄

# 1　中國剩餘定理

“孫子算經”是中國古代一部優秀數學著作，確切的出版年月無從考證。其中有“物不知其數”一問，原文如下：“今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？”

這類的問題在中國古代數學史上有不少有趣的名稱。除上所說的“物不知其數”外，還有稱之為“鬼谷算”的，“秦王暗點兵”的，“神奇妙算”的，“大衍求一術”的，⋯，等等。

這問題是屬於數論中算術數列（等差數列）的範疇。在這節裡，我們將對這樣的問題進行更為一般的探索。值得一提的是，本節所用的同餘符號“≡”是高斯在 1799 年時所引進，發明的。由於同餘符號“≡”的方便好用，後來廣為數學家所使用。可以說是一個家喻戶曉的數學符號。

## 1.1　等差數列與同餘式

首項是 2，而公差為 5 的等差數列是

$$2, 7, 12, 17, 22, \cdots,$$

但被 5 除之，餘數為 2 的同餘數列為

$$\cdots, -18, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \cdots.$$

因此等差數列是同餘數列的一部份。為了方便，將被 5 除之，餘數為 2 的同餘數列

$$\cdots, -18, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \cdots$$

用同餘式

$$x \equiv 2 \pmod 5$$

表示。因此同餘式

$$x \equiv a \pmod n$$

代表所有被 $n$ 除之，餘數為 $a$ 的整數。

## 1.2　中國剩餘定理

韓信叫兩個人去清點他的士兵，如果他們都用很偷懶的幾個士兵一數的點兵方式，回報給韓信的可能是“士兵 $m$ 個一數剩 $a$ 人；$n$ 個一數剩 $b$ 人”這樣的結果。為了解決這樣的“韓信點兵問題”，我們需要判別兩個同餘式（或等差數列）何時有共同的解，而且如何去求它們的共同解。這就是有名的中國剩餘定理（或孫子定理）。

定理 **1.1** (中國剩餘定理) 設 $m, n$ 是互質的正整數，$a, b$ 為整數，則同餘式

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod m \\ x \equiv b \pmod n \end{cases}$$

有共同的整數解 $x_0$，且所有共同的整數解 $x$ 也構成一個同餘式為

$$x \equiv x_0 \pmod{mn}.$$

【証明】因為 $m, n$ 是互質的正整數，所以可以找到整數 $x, y$ 使得（根據定理 **??**）

$$mx - ny = b - a.$$

令 $x_0 = mx + a = ny + b$，則

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod{m}, \\ x_0 \equiv b \pmod{n}. \end{cases}$$

現在令整數 $x$ 滿足

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases} \quad & \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 \equiv 0 \pmod{m} \\ x - x_0 \equiv 0 \pmod{n} \end{cases} \\ & \Rightarrow x - x_0 \equiv 0 \pmod{mn} \\ & \Rightarrow x \equiv x_0 \pmod{mn}. \end{aligned}$$

因此所有共同的整數解 $x$ 會滿足同餘式

$$x \equiv x_0 \pmod{mn}.$$

⊠

中國剩餘定理告訴我們：兩個公差互質的等差數列的交集亦為一個等差數列（事實上，此新等差數列的公差為前兩個等差數列公差的乘積）。

例題 **1.1** 解同餘式

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5}, \\ x \equiv 3 \pmod{7}, \\ x \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

【解】因為同餘式

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 17 \pmod{35},$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases} \quad & \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 17 \pmod{35} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases} \\ & \Rightarrow x \equiv 367 \pmod{385}. \end{aligned}$$

最後這步，技巧熟練的話，會比較快找到 367 這個數字。你得出 367 的技巧是好的嗎？ ⊠

## 1.3　同餘式的應用

例題 **1.2** 試求滿足 $1+3^y=2^x$ 的非負整數 $x$ 與 $y$。

【解】我們對方程式取模 8 得到

$$1+3^y \equiv 2^x \pmod 8.$$

根據 $y$ 的奇、偶性可分為

(1) 當 $y$ 為偶數時，因為 $3^y \equiv 1 \pmod 8$，所以

$$2^x \equiv 1+3^y \equiv 2 \pmod 8 \Rightarrow x=1.$$

由此得到 $(x,y)=(1,0)$。

(2) 當 $y$ 為奇數時，因為 $3^y \equiv 3 \pmod 8$，所以

$$2^x \equiv 1+3^y \equiv 4 \pmod 8 \Rightarrow x=2.$$

由此得到 $(x,y)=(2,1)$。

綜合 (1) 及 (2) 得到

$$(x,y)=(1,0) \text{ 或 } (2,1).$$

⊠

例題 **1.3** 證明：被 8 除之，餘數為 7 的正整數 $n$ 不能表為三個整數的平方和。

【証明】設整數 $x,y,z$ 滿足

$$x^2+y^2+z^2=n,$$

其中 $n \equiv 7 \pmod 8$。因此

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 7 \pmod 8;$$

但這與同餘式

$$\begin{cases} x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \\ z^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \end{cases}$$

矛盾。因此被 8 除之，餘數為 7 的正整數 $n$ 不能表為三個整數的平方和。 ⊠

例題 **1.4** 試求 $5x^3+11y^3+13z^3=0$ 的整數解 $x,y,z$。

【解】假設 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 且 $(x,y,z)=1$ 的整數 $x,y,z$ 滿足

$$5x^3+11y^3+13z^3=0.$$

因此

$$5x^3+11y^3\equiv 0 \pmod{13}.$$

又

$$\begin{cases} x^3\equiv 0,1,5,8,12 \pmod{13} \\ y^3\equiv 0,1,5,8,12 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^3\equiv 0,1,5,8,12 \pmod{13}, \\ 11y^3\equiv 0,2,3,10,11 \pmod{13}, \end{cases}$$

所以由上式的各種組合可推得

$$\begin{cases} 5x^3\equiv 0 \pmod{13} \\ 11y^3\equiv 0 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13\mid x \\ 13\mid y \end{cases} \Rightarrow 13\mid x, 13\mid y, 13\mid z.$$

此與互質的假設矛盾；因此 $x=y=z=0$ 為唯一的整數解。 ☒

習題 **1.1** 解同餘式

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{3}, \\ x\equiv 3 \pmod{5}, \\ x\equiv 3 \pmod{7}, \\ x\equiv 9 \pmod{11}. \end{cases}$$

習題 **1.2** 如果整數 $x,y,z$ 滿足 $x^3+y^3=z^3$，則證明 $x,y,z$ 至少有一個是 7 的倍數。

習題 **1.3** 試求 $5x^2+13y^2=7z^2$ 的整數解 $x,y,z$。

習題 **1.4** 試求 $x^2+3xy-2y^2=122$ 的整數解 $x,y$。[1]

習題 **1.5** 小明將他的三個小孩子（大毛、二毛、三毛）的零用錢存起來，一共有七筆如下（單位：元）：

$$130,\quad 320,\quad 430,\quad 790,\quad 3500,\quad 3620,\quad 4160.$$

迷糊的小明早已記不得哪幾筆錢是那個小孩子的。但是小明知道三毛僅有一筆錢，大毛的錢數是二毛的六倍。聰明的你，能否幫小明搞清楚這筆糊塗帳？

習題 **1.6** 有一個四位數的正整數且此四位數正整數恰為其各位數字和的立方。試確定此四位數的正整數。

習題 **1.7** 試證明由 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 七個數字所組合成的 7! 個七位數正整數中沒有一個是完全平方數。

[1] 配平方之後再取模 17。

習題 **1.8** 從 $2,3,5,7,9$ 五個數字中剔除一個數字之後，將剩下的四個數字經適當的排列之後，得到一個完全平方數，試求此完全平方數。[2]

習題 **1.9** 四位數正整數 $aabb$ 為完全平方數，試求此四位數正整數。如果改為六位數正整數 $aaabbb$，那結果又如何？

習題 **1.10** 阿三幫他父親記帳，有一則糊塗帳這樣記著：

“哈蜜瓜 37 顆計 $\square 4 \triangle 7$ 元”

事後，阿三僅知哈蜜瓜每顆為整數元且數字 $\triangle$ 比數字 $\square$ 大。你能知道哈蜜瓜一顆是多少元嗎？

習題 **1.11** 設 $a,b$ 為整數且滿足 $24 \mid (ab+1)$。證明：$24 \mid (a+b)$。

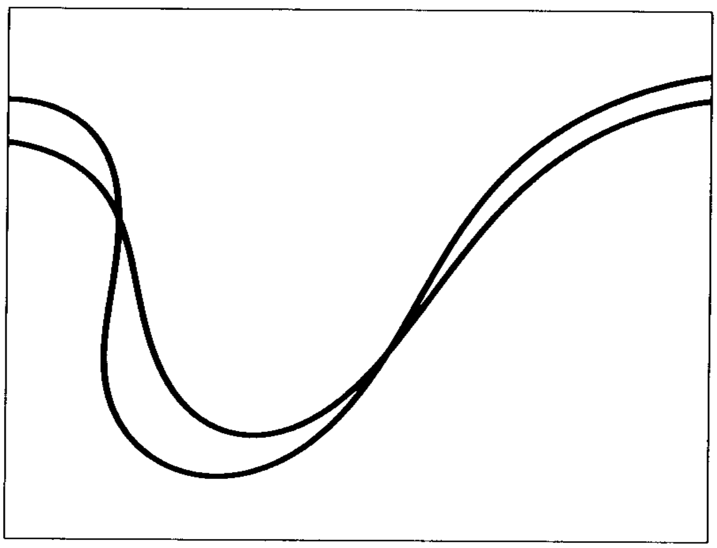
習題 **1.12** 欲將實數線上的所有格子點塗上顏色，規定相距 3 單位的任兩個整數點必須是不同色；而且相距 4 單位的任兩個整數點也是不同色。試問

(1) 僅用 2 種顏色是否可以完成。

(2) 僅用 3 種顏色是否可以完成。

動手玩數學

神探福爾摩斯追蹤一位騎腳踏車逃跑的盜匪。下圖是盜匪腳踏車前後輪所留下的軌跡。如果你是福爾摩斯的話，你會認為盜匪是騎往那個方向逃跑？



挑戰題

[2]利用模 9 來剔除數字，用模 10 及模 4 來確認此完全平方數。

有一個正整數 $n$ 使得

$$120^4 + 272^4 + 315^4 + n^4 = 353^4$$

試求此正整數 $n$ 的值。[3]

## 中國剩餘定理

中國古代的數論知識是遠遠領先其他國家的，中國剩餘定理是其中最具代表性的定理，也是當今數論上常用的一種技術。事實上，中國人習慣稱它為『孫子問題』，用來解決“物不知其數”及“韓信點兵”的問題。宋代數學家秦九韶的“大衍求一術”就是有系統的討論一次同餘方程式解的公式。這與後來高斯的解法本質上是等價的。

[3]將兩邊分別對 $2, 3, 5, 11$ 取同餘。