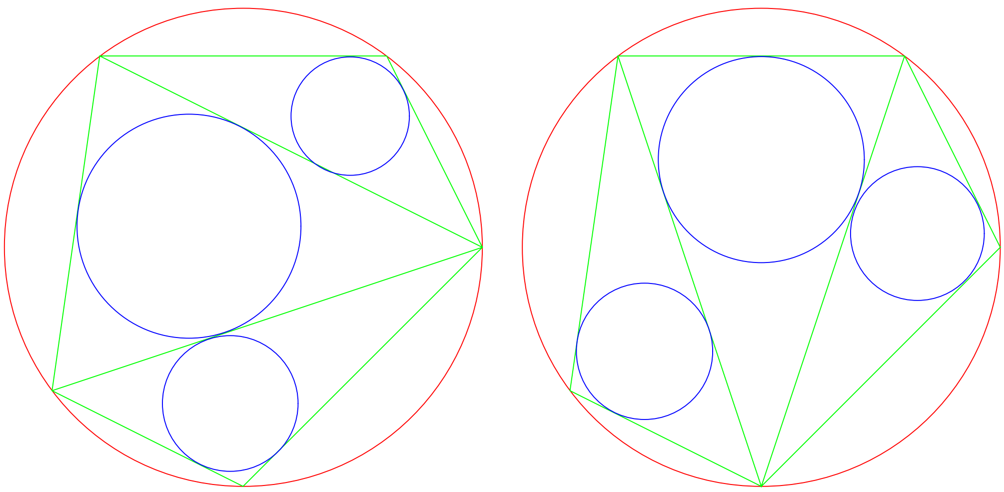
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

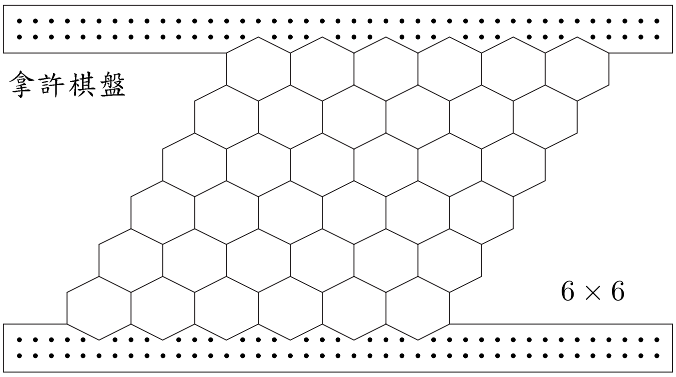
1 拿許棋

在這節裡，我們介紹一種稱為「拿許棋」的遊戲，這是為了紀念拿許在普林斯頓大學攻讀博士時，所發明的一種在洗手間六角形磁磚上塗鴉的遊戲。這是一種很神奇的遊戲，因為它不會和棋（一定可以分出勝負），而且在有限的步驟之下就可以決定勝負。更神奇的是：拿許 給了一個看似不可思議且頗為無厘頭的證明。

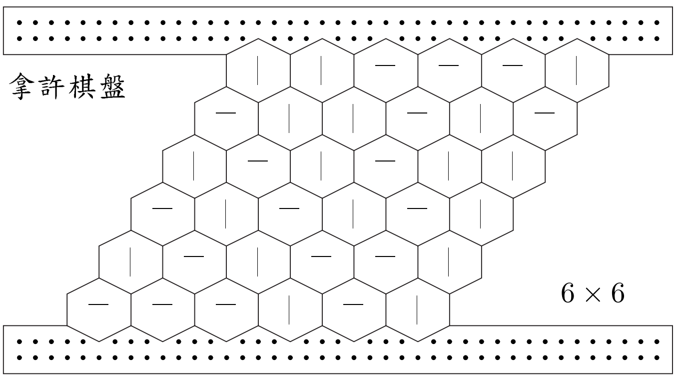
拿許剛滿三十歲時就住進了精神病醫院，諾貝爾經濟學獎委員會一直猶豫，是否該將這個獎項頒給過去研究輝煌，但現在是精神病的病人。瑞典皇家學會直到 1994 年才決定將經濟學獎頒給這位年華逝去的拿許 博士。接下來，我們來介紹拿許棋的玩法。

1.1 拿許棋盤與玩法

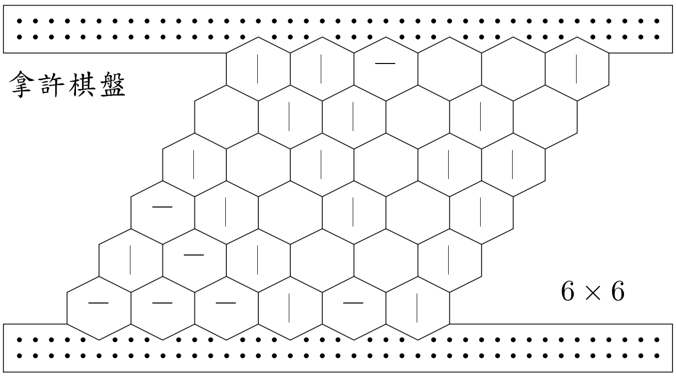
如下圖所示，6×6 的拿許棋盤是以 36 個正六邊形鋪成的大菱形。



遊戲規則：平、直雙方輪流將正六邊形格子填上「—」、「｜」兩字，填過的格子不可再填。直方玩者要在兩條黑點地帶間建立一條連續的｜字鏈；同樣的，平方玩者亦要在兩片白色區域間建立一條連續的—字鏈。遊戲直到有一方成功為止，成功建立連續字鏈者勝。如下圖：平、直雙方在經過十八手之後，所填出的—、｜字分佈圖。



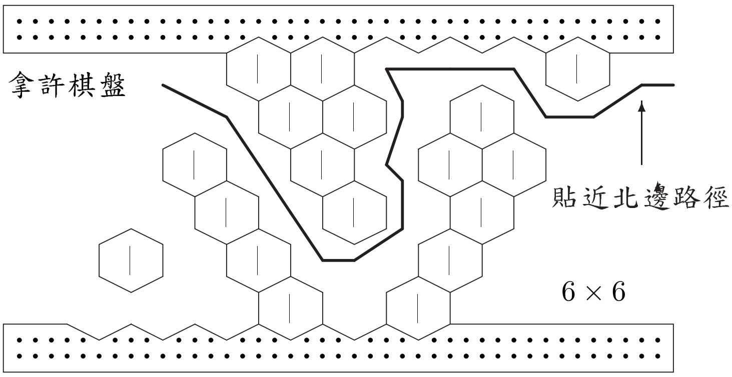
因為下圖中，空白處是平方所建立的一條貫穿白色區域之-字鏈，所以此盤遊戲平方獲勝。



以上是 6×6 拿許棋的說明。事實上，我們亦可以玩各種不同大小的拿許棋（例如 $n \times n$ 拿許棋盤，共有 n^2 個正六邊形格子）。在拿許棋遊戲中，當有一方連成連續的字鏈時，另一方一定會被此連續的字鏈所切斷，而無法連成連續的字鏈。因此，拿許棋至多僅有一方會獲勝。

1.2 拿許棋是否會和棋

既然拿許棋至多僅有一方會獲勝，那麼有趣的問題便是：拿許棋是否會和棋，也就是說平、直雙方均無法建立一條連續的字鏈。事實上，我們要說明的是：拿許棋是不會和棋的，也就是說，玩到最後一定有一方會獲勝。說明如下：如果有一盤拿許棋下到最後，直方無法建立一條連續的｜字鏈，我們僅需說明平方一定可以建立一條連續的-字鏈即可。操作情形是這樣的：拿一支剪刀將拿許棋盤兩塊白色地帶剪掉，並將平方所填入的-字正六邊形格子剪掉（如下圖所示）。



這時將你的左右手分別拿住上下黑點區域往外拉。因為直方沒有建立連續的｜字鏈，所以上下黑點區域是不相連的，也就是說，貼近北邊路徑必是平方所建立的一條連續-字鏈。因此，拿許棋是不會和棋的。

1.3 必勝策略與公平遊戲

兩人遊戲最終可能有先玩者或是後玩者勝、平手、玩不完（可算平手的一種）等三種結局。針對這個兩人遊戲，如果先玩者或者是後玩者都沒有必勝的策略在手上，則我們就把這個遊戲稱為公平的遊戲。

任何一則遊戲如果不會有平手發生（一定可以分出勝負），則這則遊戲一定是下列三種情形之一的遊戲：

$$\begin{cases}\text{先玩者有必勝策略的遊戲；}\\ \text{後玩者有必勝策略的遊戲；}\\ \text{公平的遊戲。}\end{cases}$$

拿許棋就是可分出勝負的遊戲。不僅如此，拿許棋還是「有限回合就結束且可分出勝負」的遊戲。像這樣的遊戲一定是下列兩種情形之一：

$$\begin{cases}\text{先玩者有必勝策略的遊戲；}\\ \text{後玩者有必勝策略的遊戲。}\end{cases}$$

1.4 拿許棋的必勝策略究竟屬於誰

拿許棋是一則先玩者有必勝策略的遊戲。滑稽的是，拿許所提供的證明頗為無厘頭，因為他證明：先玩者有必勝的策略，但並沒有指出必勝的棋譜是長成怎們樣。拿許的證明步驟如下：

(1) 因為拿許棋不會和棋，玩到最後必有一方會獲勝，所以只需證明後玩者（直方）沒有必勝的棋譜存在即可。

(2) 在此利用反證法，假設後玩者有必勝的棋譜。現在只需說明先玩者可以打敗後玩者；那就代表假設錯誤，即先玩者才有必勝的策略。

(3) 先玩者要打敗後玩者的方法是這樣的：先玩者請後玩者將他的必勝棋譜影印一份給旁觀者。然後先玩者正式與後玩者玩拿許棋的遊戲。先玩者首先在棋盤的任意位置填上一個「—」字，接著後玩者看了他的必勝棋譜之後，會再適當的位置填上一個「｜」字。

(4) 此時，先玩者同時找擁有影印棋譜的旁觀者玩一盤拿許棋的遊戲，且先玩者先在剛剛後玩者填「｜」字的位置填上「—」字。因為旁觀者有影印的棋譜，所以看了棋譜之後，會在適當的位置填上一個「｜」字。

(5) 這時候，先玩者再回過頭來與後玩者繼續拿許棋的遊戲，並且在剛剛旁觀者填的位置填上一個「—」字。

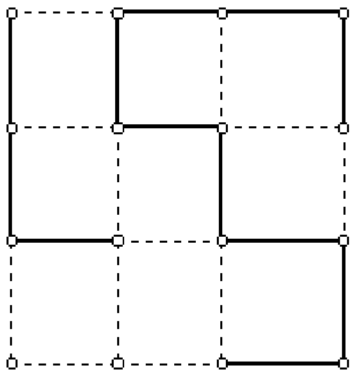
(6) 依此原則交錯進行下去⋯。在先玩者與旁觀者下的那一盤拿許棋，因為旁觀者是針對棋譜而下，所以旁觀者會贏得此盤棋。但是，對先玩者與後玩者這盤棋來講：在先玩者出手第一次之後，先玩者就變成了後玩者，且先玩者又從旁觀者那邊得知必勝的棋譜。因此，先玩者會獲勝，此與後玩者獲勝矛盾。

(7) 因此，後玩者不應該有必勝的棋譜才是。

習題 **1.1** 在 6×6 拿許棋遊戲中，先玩者的第一手應在哪些正六邊形格子上填「一」字，才能確保勝利。

動手玩數學

如下圖： 3×3 的方格棋盤（可產生 24 條水平或垂直的小線段）稱之為 3 階鬼腳棋盤。虛、實雙方分別依序將此 24 條水平或垂直的小線段塗以虛線段或實線段。當虛方的虛線段可以從左邊連接到右邊時，虛方勝；反之，當實方的實線段可以從上邊連接到下邊時，實方勝（誰先連線，誰先贏）。例如下圖是虛、實雙方交戰之後的結果，明顯的可以看出，實方的實線段可以從上貫穿到下方，所以此盤由實方贏。



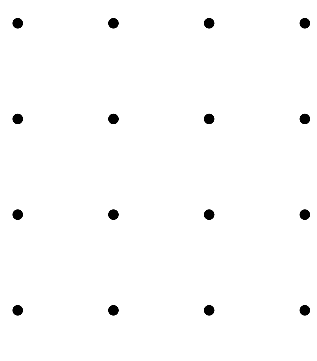
有關此遊戲：

(1) 是否有可能和棋。

(2) 是否為公平的遊戲。

挑戰題

流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。試問：誰有必勝的策略。



$\boxed{\text{拉馬努金猜想}}$

印度數學家拉馬努金在印度數學學會的期刊上，曾提出過 58 個恆等式。其中一個有關數的等式如下：

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}.$$

讀者是否有好的方法證明此等式。