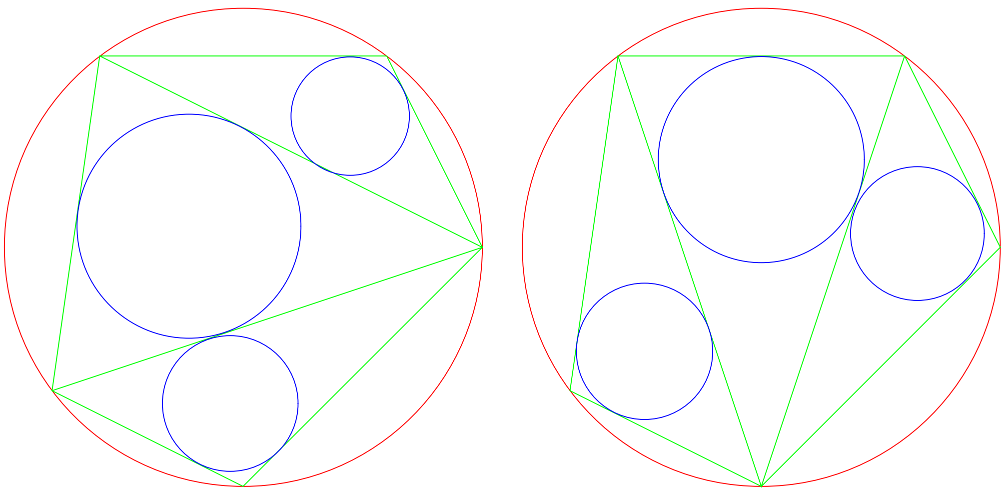
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 劉維爾定理 **1**

1 劉維爾定理

利用第 **??** 節的一次因式檢驗法，很容易知道：$\sqrt{2}$ 不是有理數，也就是說，對任意整數 $p \neq 0$ 與 q 恆有

$$\sqrt{2} \neq \frac{q}{p} \Rightarrow 2p^2 \neq q^2 \Rightarrow |2p^2 - q^2| \geq 1 \text{（因為 } 2p^2 - q^2 \text{ 是整數）。}$$

劉維爾定理就是在考慮像 $\sqrt{2}$ 這種無理數與有理數（分數）$\frac{q}{p}$ 差的範圍。

定理 **1.1** (1) 證明：對所有的正整數 p, q 恆有

$$\left|\sqrt{2} - \frac{q}{p}\right| > \frac{1}{3p^2}.$$

(2) 將 $\sqrt{2}$ 表為 2 進位為

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \in \{0, 1\}$。

證明：對任何正整數 n, $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n}$ 不全為 0。

【證明】先證明 (1)：分成三種情形討論如下：

(a) 若 $\frac{q}{p}$ 是一個正整數，則可以令 $p = 1, \frac{q}{p} = q$

$$|\sqrt{2} - q| \geq 0.4 > \frac{1}{3 \cdot 1^2}.$$

(b) 若 $0 < \frac{q}{p} \leq \frac{3}{2}$，則 $\sqrt{2} + \frac{q}{p} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

$$\begin{aligned} \left|2 - \tfrac{q^2}{p^2}\right| &= \left|\sqrt{2} - \tfrac{q}{p}\right|\left|\sqrt{2} + \tfrac{q}{p}\right| < 3\left|\sqrt{2} - \tfrac{q}{p}\right| \\ \Rightarrow \left|\sqrt{2} - \tfrac{q}{p}\right| &> \tfrac{|2p^2 - q^2|}{3p^2} \geq \tfrac{1}{3p^2}. \end{aligned}$$

(c) 若 $\frac{q}{p} > \frac{3}{2}$ 且 $p \geq 2$，則

$$\left|\sqrt{2} - \frac{q}{p}\right| > \frac{3}{2} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{3 \cdot 2^2} \geq \frac{1}{3 \cdot p^2}.$$

綜合 $(a), (b), (c)$ 證得 (1) 的結果。

其次證明 (2)：

令

$$\frac{q}{p} = 1 + \frac{a_1}{2^1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}},$$

則得到 $p \leq 2^{n-1}$. 代入 (1) 的公式得到

$$\left|\left(\frac{a_n}{2^n} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^{2n}}\right) + \left(\frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cdots\right)\right| = \left|\sqrt{2} - \frac{q}{p}\right| > \frac{1}{3p^2} \geq \frac{1}{2^{2n}}.$$

因為

$$\frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}}+\cdots \le \frac{1}{2^{2n+1}}+\cdots \le \frac{1}{2^{2n}},$$

所以

$$\frac{a_n}{2^n}+\cdots+\frac{a_{2n}}{2^{2n}} \ne 0.$$

因此 $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n}$ 不全為 0。 $\boxtimes$

劉維爾定理告訴我們：如果分數 q/p 很接近 $\sqrt{2}$，那麼分數 q/p 的分母 p 必須很大（由 (1) 得到）。事實上，我們可用類似的方法求取其它代數數，例如

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \cdots, \sqrt[3]{2}, \cdots$$

與有理數的距離不等式。

定理 **1.2** 證明：對所有的正整數 p 及整數 q 恆有

$$\left|\sqrt[3]{2}-\frac{q}{p}\right| > \frac{1}{10p^3}.$$

【證明】當 $|\sqrt[3]{2}-q/p| \ge 1$ 時，顯然成立，因此我們假設

$$\left|\sqrt[3]{2}-q/p\right| < 1.$$

由

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt[3]{2}^3-(q/p)^3\right| &= \left|\left(\sqrt[3]{2}-q/p\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}(q/p)+(q/p)^2\right)\right| \\
&= \left|\left(\sqrt[3]{2}-q/p\right)\left((\sqrt[3]{2}-q/p)^2-3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-q/p)+3\sqrt[3]{4}\right)\right| \\
&< \left|\sqrt[3]{2}-q/p\right|(1+4+5) \quad \text{（利用 } \sqrt[3]{2}<1.26\text{）} \\
&\le 10\left|\sqrt[3]{2}-q/p\right|
\end{aligned}$$

及

$$1/p^3 \le \left|\frac{2p^3-q^3}{p^3}\right| = \left|\sqrt[3]{2}^3-(q/p)^3\right|$$

證得。 $\boxtimes$

習題 **1.1** 若正整數 p 與 q 滿足

$$\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right| < 0.0001,$$

則必須 $p \ge 58$。

習題 **1.2** 證明

(1) 設 p, q 為互質的正整數。證明

$$\left|\sqrt{17}-\frac{q}{p}\right| > \frac{1}{9p^2}.$$

(2) 將 $\sqrt{17}$ 表為 3 進位為

$$\sqrt{17}=4+\frac{a_1}{3^1}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\in\{0,1,2\}$。證明：對任何正整數 $n,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{2n}$ 不全為 0。

習題 **1.3** 試求滿足下列條件的最小正整數 n：對所有的正整數 p,q 恆有

$$\left|\sqrt{5}-\frac{q}{p}\right|>\frac{1}{np^2}.$$

習題 **1.4** 證明：對所有的正整數 p 及整數 q 恆有

$$\left|\sqrt[3]{2}-\frac{q}{p}\right|>\frac{1}{6p^3}.$$

動手玩數學

給定一個正整數 N，甲、乙輪流來玩一則拆數遊戲，規則如下：甲先將 N 拆成兩個正整數的和，接下來乙必須從這兩個正整數中選擇一數，並且將此數再拆分成兩個正整數的和。然後又輪回到甲（從乙所拆的兩正整數中，選擇一數，並將其拆分成兩正整數的和）做拆數工作，如此繼續下去。最後無法選擇數來做拆分的人輸。試問：哪些正整數 N 會讓甲有必勝的拆分策略，拆分策略又為何？

挑戰題

證明數列 $<C_n>$

$$C_n=\left[2^n\cdot\sqrt{2}\right]$$

中有無窮多個偶數。（註：[ ] 代表高斯符號）

一個十進位問題

將 $\sqrt{2}$ 表為十進位時

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots.$$

一個有趣且很難的問題是說：4 是否出現無窮多次。當然也可以問其它的阿拉伯數字是否亦出現無窮多次。

一般數學家猜想任一個阿拉伯數字都會出現無窮多次，而且會很均勻的出現。如果是這樣子的話，$\sqrt{2}$ 的小數部份就是很好的亂數，也是賭博機器上最好的亂碼。有關這方面的問題還沒有很漂亮的結果。