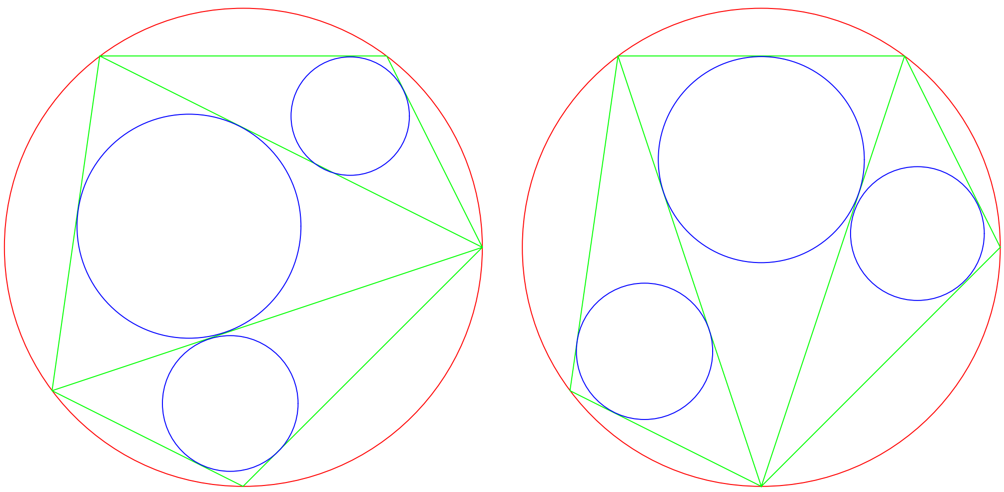
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1　狄利克雷定理

數學家狄利克雷利用簡單的鴿籠原理證明了有名的狄利克雷定理：

定理 **1.1** (狄利克雷定理) 如果 α 是實數，N 是一個正整數，則可以找到正整數 n $(1 \le n \le N)$ 及整數 m 滿足

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nN}.$$

【證明】考慮下列 N 個實數

$$0 \le n\alpha - [n\alpha] < 1,\ n = 1, 2, 3, \cdots, N.$$

由於此 N 個數落在

$$[0, 1/N), [1/N, 2/N), [2/N, 3/N), \cdots, [(N-1)/N, 1)$$

N 個區間內，所以有底下兩種情形：

(1) 每一個區間恰含一個數，因此可以找到正整數 $n(1 \le n \le N)$ 滿足

$$0 \le n\alpha - [n\alpha] < \frac{1}{N} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{[n\alpha]}{n}\right| < \frac{1}{nN}.$$

(2) 有一個區間含兩個數以上：設正整數 $1 \le n_1 < n_2 \le N$ 滿足

$$\begin{cases} \frac{i}{N} \le n_1\alpha - [n_1\alpha] < \frac{i+1}{N} \\ \frac{i}{N} \le n_2\alpha - [n_2\alpha] < \frac{i+1}{N} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow 0 \le \mid (n_2 - n_1)\alpha - ([n_2\alpha] - [n_1\alpha]) \mid < \tfrac{1}{N} \\ &\Rightarrow \left|\alpha - \tfrac{[n_2\alpha] - [n_1\alpha]}{n_2 - n_1}\right| < \tfrac{1}{(n_2 - n_1)N}. \end{aligned}$$

得證。 ⊠

定理 **1.2** 設實數 α 不是有理數。證明：可以找到無窮多個分數 m/n （其中 n 為正整數，m 為整數）滿足

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

【證明】假設僅有 d 個分數滿足定理所要求，並令此 d 個分數分別為

$$\frac{m_i}{n_i},\ i = 1, 2, 3, \cdots, d.$$

因為 α 不是有理數，所以 $\alpha - m_i/n_i \ne 0$。因此可以取一個滿足

$$\frac{1}{N} < \left|\alpha - \frac{m_i}{n_i}\right|,\ i = 1, 2, 3, \cdots, d$$

的大整數 N。根據狄利克雷定理：可以找到正整數 n $(n \le N)$ 及整數 m 使得

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nN} \le \frac{1}{n^2}.$$

因為

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nN} \leq \frac{1}{N},$$

所以分數 m/n 不是前面假設的 d 個分數之一；但這與

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$$

矛盾。因此可以找到無窮多個分數 m/n（其中 n 為正整數，m 為整數）滿足

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

⊠

定理 **1.3** 設正整數 s 不是完全平方數。證明：可以找到無窮多個整數數對 (x, y) 滿足

$$| x^2 - sy^2 | < 1 + 2\sqrt{s}.$$

【證明】由前定理知道：可以找到無窮多個正分數 x/y 滿足

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{s} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2} \quad &\Rightarrow \begin{cases} | y\sqrt{s} - x | < \dfrac{1}{y} \\ | y\sqrt{s} + x | \leq | -y\sqrt{s} + x | + 2y\sqrt{s} < \dfrac{1}{y} + 2y\sqrt{s} \end{cases} \\ &\Rightarrow | x^2 - sy^2 | < \tfrac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2y\sqrt{s}\right) = \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{s} \leq 1 + 2\sqrt{s}. \end{aligned}$$

因此可以找到無窮多的正整數數對 (x, y) 使得

$$| x^2 - sy^2 | < 1 + 2\sqrt{s}.$$

⊠

取 $s = 3$ 時，這個定理告訴我們：有無窮多個整數數對 (x, y) 滿足

$$\left|x^2 - 3y^2\right| \leq 4.$$

換句話說：雙曲線 $x^2 - 3y^2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ 中，至少有一條通過無窮多個整數數對。事實上，在第 **??** 節中，我們已經證明 $s = 2$ 的情形；在第 **??** 節中，我們將證明更一般的結果。

動手玩數學

觀察等式

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} &= 1 + \frac{1}{2}, \\ 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ 4 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

根據這些等式，是否可以得到比較一般的猜測。

$\boxed{\text{挑戰題}}$

設 p, q 為實數且 $x^3 - px + q = 0$ 有三實根。

(1) 證明 $p \geq 0$。

(2) 若 α 為 $x^3 - px + q = 0$ 的一根，則證明

$$|\alpha| \leq 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

$\boxed{\text{費馬質數問題}}$

我們都知道第 n 個費馬數 F_n 定義為正整數

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

是否存在無窮多個費馬質數（即既是費馬數也是質數）一直是很困難的問題。費馬質數之所以重要的原因是因為：利用代數學上的伽羅瓦理論，數學家可以證明："正質數 P 邊形可以尺規作圖的充要條件是 P 是一個費馬質數"。由此結果，我們知道：正

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$$

邊形等是可以尺規作圖的；而正 $7, 11, 13$ 邊形是不能以尺規作圖的（因為它們不是費馬質數）。