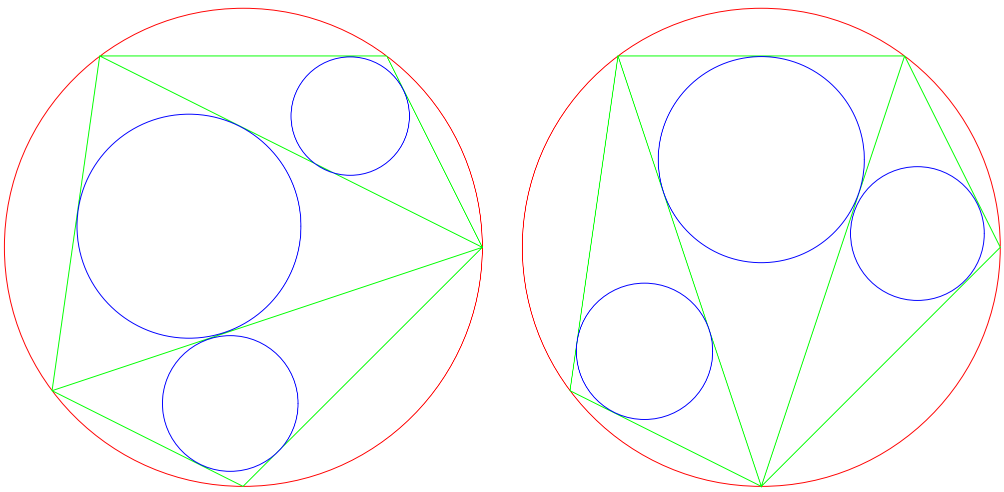
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1　橢圓方程式（Elliptic Equation）

定理 **1.1** 證明：方程式

$$y^2 = x^3 + 23$$

無整數解 x 與 y。

【證明】假設整數 x 與 y 滿足原方程式，則我們有

$$\begin{cases} (\text{整數})^2 \equiv 0, 1 \pmod 4, \\ (\text{整數})^3 \equiv 0, 1, 3 \pmod 4, \\ y^2 \equiv x^3 + 23 \pmod 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \equiv 0 \pmod 4, \\ x^3 \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2|y, \\ x \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

將原方程式改寫為

$$4(y/2)^2 + 4 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9).$$

因為 $x \equiv 1 \pmod 4$, 所以 $x^2 - 3x + 9$ 被 4 除之，餘數為 3；即至少有一個被 4 除之，餘數為 3 的質數 p 整除 $x^2 - 3x + 9$。由此可推得

$$\begin{aligned} p \mid (y/2)^2 + 1 \quad &\Rightarrow (y/2)^2 \equiv -1 \pmod p \\ &\Rightarrow (y/2)^4 \equiv 1 \pmod p. \end{aligned}$$

由費馬小定理知道

$$4 \mid (p-1) \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4.$$

這與質數 p 先前的假設矛盾。 ☒

習題 **1.1** 證明：方程式 $y^2 = x^3 - 5$ 無整數解 x 與 y。

習題 **1.2** 證明：方程式 $y^2 = x^3 + 11$ 無整數解 x 與 y。[1]

習題 **1.3** 證明：方程式 $y^2 = x^3 - 17$ 無整數解 x 與 y。

習題 **1.4** 考慮方程式 $y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的整數解 x 與 y 如下：

(1) 當 $x < -1$ 或 $x > 3$ 時，證明：

$$(2x^2 + x)^2 < 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 < (2x^2 + x + 1)^2.$$

(2) 利用 (1) 求方程式的整數解 x 與 y。

[1] 需要利用例題 **??** 的結果。

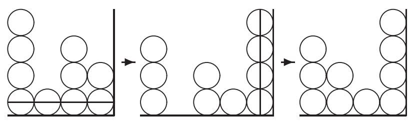
習題 **1.5** 數學家想要知道“是否有既可表為三個連續正整數乘積且亦可寫成兩個連續正整數乘積的正整數”。將此問題代數化，即是在解方程式

$$y^2 + y = x^3 - x$$

的正整數解 x 與 y。事實上，此方程式有顯然的整數解為 $(1,-1)$ 與 $(2,2)$。試求過此兩點的直線與方程式的另一個交點為何？[2]

動手玩數學

如下圖：先將十個小皮球整齊地擺在一起（如第一圖所示），首先將最底下一列的小皮球（畫線的小皮球）拿掉，直擺到最右邊（如第二圖所示）；然後，如果有空白行出現，則將空白行左邊的小白球向右平移，讓它們緊靠在一起（如第三圖所示）。像這樣的過程，稱為操作一次。無論剛開始如何擺放小白球（不一定要擺四行，可擺任意行），在經過某些次的操作之後，是否都會產生同樣的結果。



挑戰題

考慮方程式 $y^2 = x^3 + 7$.

(1) 若整數數對 (x, y) 滿足此方程式，則 x 是奇數。

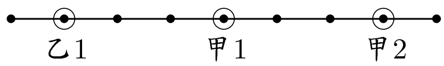
(2) 證明此方程式無整數解。（提示：利用 $y^2 + 1^2 = (x+2)((x-1)^2+3)$ 有一個被 4 除之，餘數為 3 的質因數。這個證明方法是由數學家勒貝格在 1869 年提出）。

獨立遊戲

這個遊戲是匈牙利的一位數學家圖沙在一個會議上所提出來的。現在就來介紹這個遊戲的玩法：一直線上有 n 個點（如下圖所示），甲、乙兩個人輪流每次只能選取一個點（甲先玩、乙後玩），而且每次所新選取的點，不能在之前已選的點的旁邊。最後當有人不能選取點的時候，那個人就輸了。

[2]求出的解與 $(2,2)$ 是方程式的所有正整數解，參考 Quantum January/February 1997, pp. 5-10，像本問題的求點方法是有名的切線-割線法。

我們的目的是：當甲、乙兩人都玩得很有策略的時候，找出 n 等於多少的時候，誰會贏。例如：當 $n=3$ 時，甲選中間的點的時候，乙就不能再選了，那麼甲就贏定了。同時，我們也可以觀察到：當 n 是奇數的時候，甲有必贏的策略。因為甲選取中間點，就把這些點等分成兩個部份。而乙選取其中一個部份的某點時，那麼甲只要對稱中間點來選取另外一部份的那點即可。這樣下去，乙一定先遭遇到不能選取的情況（如下圖所示），那麼甲就贏定了。



如果 n 為偶數，很明顯地當 $n=2$ 時，甲贏。當 $n=4$ 時，乙會贏。而當 $n=6$ 時，只要甲選取最後一個點，那麼能夠選取的點就只剩下四個。因為 $n=4$ 是後玩的人贏，所以 $n=6$ 時，甲會贏。之後，我們可以檢驗出當 $n=8$ 時，乙贏；$n=10$ 時，是甲贏。繼續下去我們就可以知道當 $n=12,14,16,18$ 時，甲贏；$n=20,24,28$ 時，乙贏。

圖沙猜想：乙會贏的數字為 $n=0,14,34$ 或

$$n \equiv 4,8,20,24,28 \pmod{34}.$$