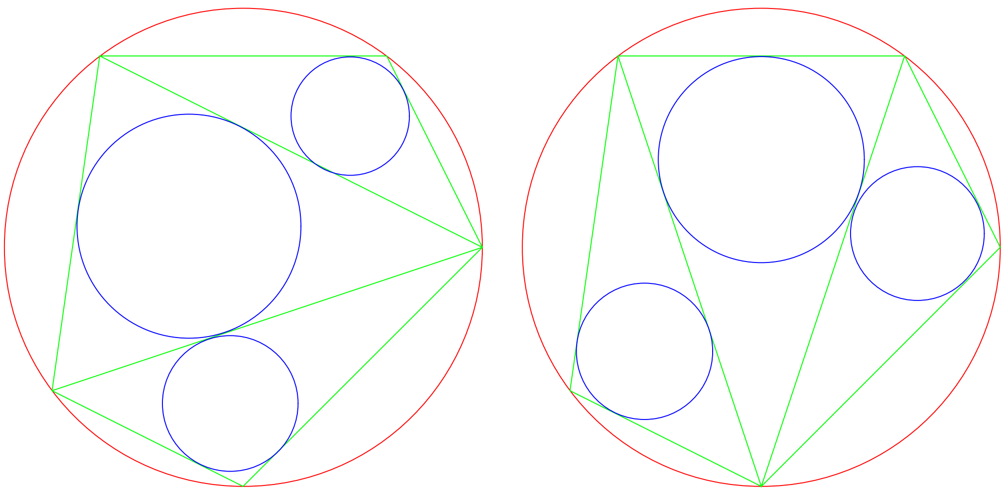
算術講義

許　志　農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1　一元三次方程式的判別式

1.1　回顧一元二次方程式

如果 p, q 是兩個實數，多項式函數 $f(x) = x^2 - px + q$ 在座標平面上的圖形為開口向上的拋物線。至於此拋物線與 x 軸相交（相切或相離）的情形完全由此二次方程式的判別式

$$\Delta(f) = p^2 - 4q$$

來決定。大概的情形是這樣的：

(1) 若 $\Delta(f) > 0$，則此拋物線與 x 軸相交於相異的兩點（或此方程式有相異的兩實根）。

(2) 若 $\Delta(f) = 0$，則此拋物線與 x 軸相切（或此方程式有相等的兩實根）。

(3) 若 $\Delta(f) < 0$，則此拋物線與 x 軸相離（或此方程式有相異的共軛複數根）。

上述三種情形的證明是基於下面簡單結果得到的：設 a, b 是方程式 $f(x) = 0$ 的兩個根，且不妨設

$$\begin{cases} a = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ b = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = p \\ ab = q \end{cases} \quad \text{（根與係數關係）.}$$

因此我們有

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = p^2 - 4q = \Delta(f).$$

所以一元二次方程式的判別式剛好是此二次方程式的兩根相減的平方。

1.2　一元三次方程式

如果 p, q, r 是三個實數，多項式函數 $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ 在座標平面上的圖形較前小節開口向上的拋物線為複雜。想要研究此曲線與 x 軸相交（相切或相離）的情形需引進此三次方程式的判別式。現在的問題是“何者是三次方程式 $f(x) = 0$ 的判別式”。我們想仿造二次方程式的作法，首先由函數 $y = f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ 的如下簡單性質：

(1) 當 x 值很大時，$f(x)$ 是正數（因為 $f(x)$ 的首項係數為 1）。

(2) 當 x 值是負很大時，$f(x)$ 是負數（因為 $f(x)$ 的首項係數為 1）。

及勘根定理（或繪圖觀察）得知：此類三次方程式至少有一個實根 a。因為 $x - a$ 可以整除三次多項式 $f(x)$，所以 $f(x) = 0$ 的另外兩個根必是某實係數二次方程式的根。再綜合前一小節的結果，我們有

定理 **1.1** 如果 p,q,r 是三個實數，那麼三次方程式

$$f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$$

的三根有如下兩種情形：

(1) 一實根，兩（相異）共軛複數根。

(2) 三實根。

仿造前一小節的情形，我們定義三次方程式的判別式如下：
設 a,b,c 是三次方程式

$$f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$$

的三個複數根（實數也是複數），則我們定義此方程式的判別式為

$$\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

首先所碰到的問題是“如何將判別式 $\Delta(f)$ 改寫成僅與多項式 $f(x)$ 的係數 p,q,r 相關的式子”。這就是

定理 **1.2** 設

$$\begin{cases} p=a+b+c \\ q=ab+bc+ca \\ r=abc \end{cases}$$

試證明式子

$$p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2$$

與式子

$$\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

相同。

【證明】令

$$F(a,b,c) \quad = p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2.$$

因為 p,q,r 三式都是 a,b,c 的對稱多項式（即將 a,b,c 互換之後所得到的式子與原式子一樣），所以多項式 $F(a,b,c)$ 亦是 a,b,c 的對稱多項式且其展開式中每一項的次數都是六次。因此只需比較多項式 $F(a,b,c)$ 與 $\Delta(f)$ 兩式中所有六次項的係數相同即可，又因為對稱多項式的關係，所以只需比較

$$a^6, a^5b, a^4b^2, a^4bc, a^3b^3, a^3b^2c, a^2b^2c^2$$

七項的係數即可。

(1) $F(a,b,c)$ 及 $\Delta(f)$ 在 a^6, a^5b 項的係數均為 0。

(2) $F(a,b,c)$ 在 a^4b^2 項的係數為

$$1-0+0-0=1,$$

$\Delta(f)$ 在 a^4b^2 項的係數為

$$1.$$

(3) $F(a,b,c)$ 在 a^4bc 項的係數為

$$2-4+0-0=-2$$

$\Delta(f)$ 在 a^4bc 項的係數為

$$-2.$$

(4) 同理可得 $F(a,b,c)$ 及 $\Delta(f)$ 在 $a^3b^3, a^3b^2c, a^2b^2c^2$ 項的係數亦相同。

因此證得 $F(a,b,c)$ 與 $\Delta(f)$ 相等。 ⊠

由這定理我們知道三次方程式的判別式 $\Delta(f)$ 是可表為僅與係數相關的多項式的形式。利用這種表示法我們有

定理 **1.3** 如果 p,q,r 是三個實數，那麼三次方程式

$$f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$$

的三根分佈有如下的判斷情形：

(1) 一實根，兩相異共軛複數根 $\Longleftrightarrow \Delta(f)=p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2<0$。

(2) 三實根 $\Longleftrightarrow \Delta(f)=p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2\geq 0$。

【證明】我們由前定理證得等式

$$\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2.$$

設實數 a 及複數 $b=m+\sqrt{n}, c=m-\sqrt{n}$（其中 m,n 為實數）為方程式 $f(x)=0$ 的三根，則

(1) $(\Rightarrow)$ 若 $f(x)=0$ 的根是一實根，兩共軛複數根，則 $n<0$。此時

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &= (a-m-\sqrt{n})^2(2\sqrt{n})^2(a-m+\sqrt{n})^2\\ &= 4n\left((a-m)^2-n\right)^2<0.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 若 $\Delta(f)=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<0$，則 a,b,c 不可能全為實數。因此 $n<0$，即 $f(x)=0$ 的根是一實根，兩共軛複數根。

(2) $(\Rightarrow)$ 若 $f(x)=0$ 的根是三實根，則 $n \geq 0$。此時

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \\ &= (a-m-\sqrt{n})^2(2\sqrt{n})^2(a-m+\sqrt{n})^2 \geq 0.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 若 $\Delta(f) \geq 0$，則由

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \\ &= (a-m-\sqrt{n})^2(2\sqrt{n})^2(a-m+\sqrt{n})^2 \\ &= 4n\left((a-m)^2-n\right)^2\end{aligned}$$

可知 $n \geq 0$，即 $f(x)=0$ 有三實根。 ⊠

定理 **1.4** 如果 q, r 是實數，則三次方程式

$$f(x) = x^3 + qx - r$$

的判別式為

$$\Delta(f) = -(4q^3 + 27r^2).$$

【證明】由上述公式（代入 $p=0$）馬上得到。 ⊠

例題 **1.1** 試判別方程式

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{27} = 0$$

三根的分佈情形。

【解】根據判別式公式得到

$$\Delta(f) = -\left(4\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3 + 27\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^2\right) = -\frac{17}{16\cdot 27} < 0.$$

所以此方程式的三根為一實根，二虛根。 ⊠

習題 **1.1** 如果 q, r 是實數，考慮三次方程式

$$f(x) = x^3 + qx - r = 0.$$

若 $q > 0$，則此方程式的三根是一實根，兩相異虛根。

習題 **1.2** 設 $F(a,b,c)$ 是一個整係數（含變數 a,b,c）的多項式。

(1) 如果 $F(a,a,c)=0$（即將原多項式的 b 換成 a），則證明

$$(a-b) \mid F(a,b,c).$$

(2) 如果 $F(a,b,c)$ 滿足

$$\begin{cases} F(a,b,c) = -F(b,a,c), \\ F(a,b,c) = -F(a,c,b), \\ F(a,b,c) = -F(c,b,a). \end{cases}$$

試證明

$$(a-b)(b-c)(c-a) \mid F(a,b,c).$$

習題 **1.3** 設複數 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是

$$x^3 - 21x - 7 = 0$$

的三個根。試求

$$(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma_1)$$

的值。

習題 **1.4** 設三次多項式 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$。

(1) 試判別 $f(x) = 0$ 有幾個實數根，並利用勘根定理求這些實數根介於哪些連續整數之間。

(2) 有幾個實數根可以表為 $2\cos\theta\ (0 \le \theta < 2\pi)$ 的形式。

(3) 設 $x = 2\cos\theta\ (0 \le \theta < 2\pi)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。試求 θ 之值。

動手玩數學

給定一個任意的凸四邊形，是否一定可以用直尺及圓規畫出一個三角形使得他們面積相等。

挑戰題

一個齊次多項式 $F(a,b,c)$ 是指 $F(a,b,c)$ 的每一單項的次數（是指 a,b,c 三變數的次數和）都一樣。例如：

$$F(a,b,c) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$$

是一個 3 次齊次多項式。

(1) 試找出所有滿足

$$\begin{cases} F(a,b,c) = -F(b,a,c), \\ F(a,b,c) = -F(a,c,b), \\ F(a,b,c) = -F(c,b,a) \end{cases}$$

的整係數 3 次齊次多項式 $F(a,b,c)$。

(2) 設

$$\begin{cases} p = a + b + c, \\ q = ab + bc + ca, \\ r = abc. \end{cases}$$

試證明

$$p^2q^2 - 4p^3r + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

(3) 符號 p, q, r 承 (2)，若 $F(a,b,c)$ 是一個整係數 3 次齊次多項式，且滿足

$$F(a,b,c) = F(b,a,c) = F(c,b,a).$$

試證明 $F(a,b,c)$ 可表為 p, q, r 的整係數多項式。

$\boxed{\text{和} = \text{積} = 1 \text{ 定理}}$

數學家愛爾特希在 1960 年到北京訪問時，曾提到“不知是否有三個有理數，使它們的和等於 1，它們的積亦等於 1”。隨後，中國數學家柯召解決此一問題，並將它發表在四川大學學報自然科學版。