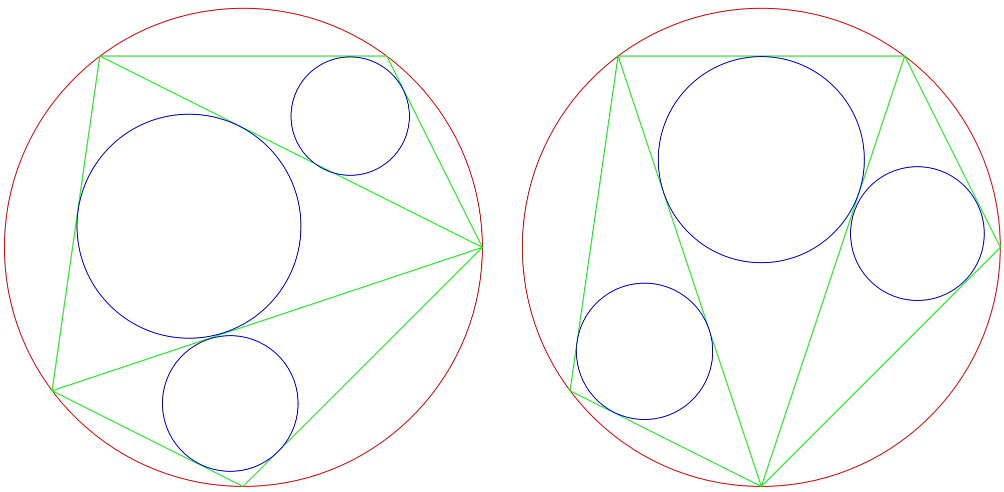
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1　佩爾方程式

設正整數 x, y 滿足 $x^2 - 2y^2 = 1$。證明：可以找到一個正整數 n 使得

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

【證明】圓錐曲線 $x^2 - 2y^2 = 1$ 為雙曲線，我們容易算得離原點最近的兩個正整數解為 $(3, 2), (17, 12)$（註：$17 + 12\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2$)）；而且若正整數 x, y 滿足

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n,$$

則

$$x^2 - 2y^2 = (3 + 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^n = 1.$$

現在使用反證法，假設 x, y 為滿足 $x^2 - 2y^2 = 1$，不能表為

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解，並令整數數對 (x_0, y_0) 滿足

$$x_0 + y_0\sqrt{2} = \frac{x + y\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = (3x - 4y) + (3y - 2x)\sqrt{2}.$$

我們有

$$\begin{cases} x_0^2 - 2y_0^2 = 1 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \\ x > 3, y > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3x - 4y = \dfrac{9x^2 - 16y^2}{3x + 4y} = \dfrac{x^2 + 8}{3x + 4y} > 0 \\ y_0 = 3y - 2x = \dfrac{9y^2 - 4x^2}{3y + 2x} = \dfrac{y^2 - 4}{3y + 2x} > 0 \\ x - x_0 = -2x + 4y = 2\left(\dfrac{x^2 - 2}{2y + x}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x_0 < x, \\ 0 < y_0, \\ x_0^2 - 2y_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0\sqrt{2} \text{ 不能表為 } (3 + 2\sqrt{2})^n \text{ 的形式。} \end{cases}$$

這與假設"x, y 為滿足 $x^2 - 2y^2 = 1$，不能表為

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解"矛盾。 ⊠

事實上，這個證明方法稱為費馬無限遞降法。類似此種的方程式

$$x^2 - dy^2 = 1, \text{（}d\text{ 是個非完全平方的正整數）}$$

皆稱為佩爾方程式。佩爾方程式的正整數解通解都是先找一組最接近原點的正整數解，然後證明此最接近原點的正整數解可以生成所有其它的正整數解。歷史上最早研究佩爾方程式的人是印度數學家婆羅摩笈多（$598 - 665$ 以後），而諷刺的是佩爾從未研究過佩爾方程式。

習題 **1.1** 試求方程式

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 **1.2** 試求方程式

$$x^2 - 10y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 **1.3** 試求方程式

$$x^2 - 11y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 **1.4** 試求方程式

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

正整數解的通解。

習題 **1.5** 證明：可以找到無窮多個三邊長都是正整數且兩股差為 1 的直角三角形。

動手玩數學

有三所學校，每校都有 N 個學生。如果每一學校的每個學生至少認識其它兩個學校的 $N+1$ 個學生（這裡的認識是指互相認識），則是否一定有三個學生彼此互相認識？

挑戰題

數列 $< f_n >$ 定義如下：

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = 3f_{n+1} - f_n (n \geq 0).$$

證明：雙曲線

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1$$

滿足 $x > y$ 的正整數解必為

$$(x, y) = (f_{n+1}, f_n), \quad n \geq 1$$

的形式。

abc 猜想

如果一個正整數 N 的因數分解如下：

$$N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 為相異的質數； $n_1, n_2, \cdots, n_l$ 為正整數，則我們定義

$$F(N) = p_1 p_2 \cdots p_l.$$

有名的"abc 猜想"是說：是否存在一個正實數 κ 使得對任意兩兩互質且滿足 $a+b=c, abc \neq 0$ 的整數 a, b, c 恆有

$$\max\{|\, a \,|, |\, b \,|, |\, c \,|\} \leq \kappa F(|\, a \cdot b \cdot c \,|)。$$

多數數學家傾向於認為這個猜想是正確的。