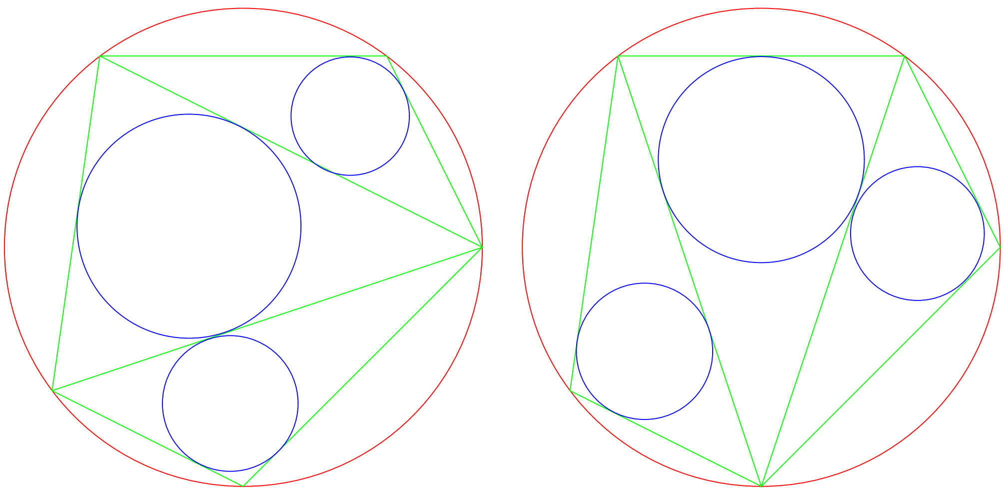
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目錄

1　希爾伯特第三問題

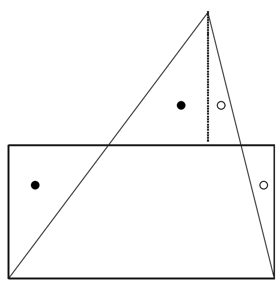
在 1900 年時，希爾伯特於巴黎舉行的第二屆國際數學會議上，提出了歷史上尚未解決的二十三個數學問題集。其中第三問題是有關多面體的分割問題。為了易於暸解及歷史發展的原因，我們從較簡單的多邊形的分割問題講起。同時為了方便討論起見，本文所指的多邊形與多面體都是指凸多邊形與凸多面體（事實上，這樣的條件限制可以剔除）。

1.1　多邊形的基本定理

假如我們手邊有有限個多邊形（形狀可以相異），甲利用這些多邊形拼湊出一個大多邊形 R；乙卻利用這些多邊形拼湊出另一個大多邊形 T。儘管 R 與 T 的形狀可能不一樣，但是它們的面積一定相同（因為均由同樣的多邊形拼湊而成，差別僅在拼湊方式而已）。為了方便起見，我們稱這樣拼湊而成的多邊形 R 與 T 同餘。關於同餘多邊形，最典型，也是最膾炙人口的例子有

例題 **1.1** 假設 T 是一個三角形；R 是一個矩形。如果三角形 T 的底邊邊長與矩形 R 的長一樣；三角形 T 底邊上的高是矩形 R 寬的兩倍，則三角形 T 與矩形 R 是同餘的。

【證明】這問題的證明是容易的，將三角形 T 與矩形 R 疊在一起（如下圖）

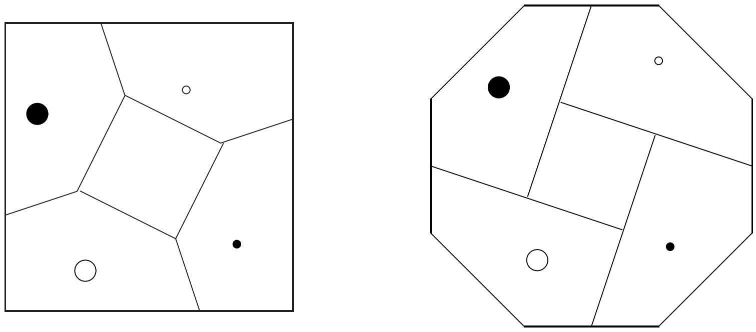


由虛線（輔助線）知道：此兩圖形是由三塊多邊形（一塊四邊形、兩塊三角形）用兩種不同的方式拼湊而成；因此這樣的三角形 T 與矩形 R 是同餘的。 ⊠

稍微困難一點的例子是

例題 **1.2** 假設 T 是一個正方形；S 是一個正八邊形。如果正方形 T 的面積與正八邊形 S 的面積相等，則 T 與 S 是同餘。

【證明】證明如下圖的分割，這個分割方法是特姆斯在 1933 年給的。



一般數學家相信：不可能找到四塊小多邊形同時可以拼湊出 T 與 S；也就是說特姆斯的五塊分割，已經是最少的了；如果你會證明的話，這將是一個很好的結果。 ⊠

最後值得一提的是：有關多邊形的同餘（或分割）問題最重要的一個結果是多邊形的基本定理，即面積相等的多邊形都是同餘。由此知道，單位面積的正三角形與單位面積的正方形是同餘的；你能給一種分割嗎？或者給多邊形的基本定理一個證明。

1.2 多面體的同餘問題

有了多邊形同餘的觀念之後。同樣的道理，可以考慮多面體的情形。 如果我們手邊有有限個多面體（形狀可以相異）的積木，甲利用它們拼湊出一個大多面體 T；乙卻利用這些多面體積木拼湊出另一個大多面體 S，這時我們稱多面體 T 與 S 同餘。希爾伯特的第三問題就是問“如果有兩個多面體 T 與 S，它們的體積相同，則多面體 T 與 S 是否同餘？”。事實上，這問題的答案是否定的。在希爾伯特提出這個問題之後的幾個月內，數學家馬德恩便解決了這個問題。馬德恩的方法是去證明“單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）是不同餘的”；為了證明這個反例，馬德恩首先得到一個有關同餘的必要條件。底下讓我們先來瞭解馬德恩的這個必要條件是什麼。

多面體的一個二面角是指此多面體某兩個相鄰面的夾角。因為多面體兩個相鄰面的交集剛好是此多面體的一條邊線，所以一個多面體的邊線剛好與這個多面體的二面角有一一對應的關係。如果多面體 T 與 S 同餘，且是由小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 拼湊而成。假設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是多面體 T 的所有二面角；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是多面體 S 的所有二面角。現在我們要來算所有小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 上所有二面角的和。因為多面體 T 可由小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 拼湊而成；所以任何小多面體 P_i 上的任一條邊線可能有如下的四種情形：

(1) 小多面體 P_i 上的邊線是多面體 T 的某邊線的一段（因為 T 的一條邊線可能是好多條小多面體上的邊線接起來）。

(2) 小多面體 P_i 上的邊線落在 T 的某個面上；而不在 T 的邊線上。

(3) 小多面體 P_i 上的邊線落在 T 的內部，且此邊線僅跟其它小多面體的邊線相接觸；沒有跟任何其它小多面體的面接觸。

(4) 小多面體 P_i 上的邊線落在 T 的內部，且此邊線恰與某小多面體的某個面接觸。

要算所有小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 上所有二面角的和，只需算上述四類中小多面體 P_i 上的邊線所對應的二面角的和即可。第一類小多面體 P_i 上的邊線所對應的二面角的和可表為

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是某些正整數；第二類小多面體 P_i 上的邊線所對應的二面角的和是 π 的倍數；第四類小多面體 P_i 上的邊線所對應的二面角的和也是 π 的倍數；至於第三類小多面體 P_i 上的邊線所對應的二面角的和則是 2π 的倍數。因此所有小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 上所有二面角的和可表為

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m + L_T\pi,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是某些正整數；L_T 為某非負整數。

因為小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 也是多面體 S 的一種分割，所以同理可知道：所有小多面體 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 上所有二面角的和可表為

$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_n\beta_n + L_S\pi,$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是某些正整數；L_S 為某非負整數。綜合這兩個表示式，我們得到一個關於同餘多面體的必要條件如下：

定理 **1.1** 如果多面體 T 與 S 同餘，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是多面體 T 的所有二面角；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是多面體 S 的所有二面角則存在正整數 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 使得

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m) - (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_n\beta_n)$$

是 π 的整數倍。

有了上述定理之後，我們可以用此定理來證明希爾伯特的第三問題。

定理 **1.2** 證明：單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）是不同餘的。

【證明】假設正四面體的二面角為 α，則我們容易計算得到

$$\cos\alpha = 1/3, \sin\alpha = 2\sqrt{2}/3$$

至於正六面體（正立方塊）的二面角則均為 $\pi/2$。現在假設“單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）同餘”，則根據前定理，我們必須有

$$a \cdot \alpha - b \cdot \frac{\pi}{2} = c \cdot \pi,$$

其中 a, b 為正整數，c 為整數。由此我們推得

$$\alpha = \frac{m\pi}{n},$$

其中 m,n 為正整數。

令

$$\begin{aligned} z &= \cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{1+2\sqrt{2}i}{3};\\ \bar{z} &= \cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1-2\sqrt{2}i}{3}. \end{aligned}$$

因為 $\alpha = \frac{m\pi}{n}$，所以有 $z^n = \bar{z}^n = 1$；即 z 與 $\bar{z}$ 是方程式 $x^n - 1 = 0$ 的兩個相異根。又因為

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1.$$

因此我們得到

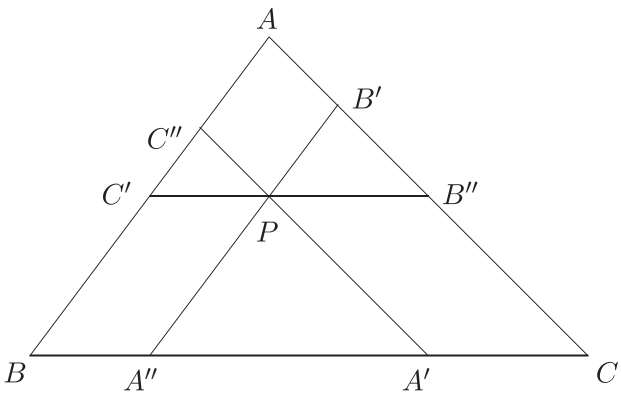
$$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) \Big| \left(x^n - 1\right). \tag{1.1}$$

針對式子 (1.1)，我們有兩種作法，第一種作法是直接證明多項式 $x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ 是不可能整除多項式 $x^n - 1$；另一種是使用第 **??** 節的高斯引理。所謂高斯引理是說一個首項係數為 1，其它項係數為有理數的多項式如果整除一個首項係數為 1，其它項係數為整數的多項式，則除式的其它項係數必須也是整數。所以式子 (1.1) 與高斯引理是相違背的。因此最開始的假設是錯的，即單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）是不同餘的。 ⊠

動手玩數學

如下圖：P 是三角形 ABC 內部的一點，過 P 點的三條線分別與三角形的底邊平行且線段長 $AB = c, BC = a, CA = b; A'A'' = a', B'B'' = b', C'C'' = c'$。試證明

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$



挑戰題

定義多項式

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} x^{2n-i}(1-x)^i.$$

若 n 為正整數，則證明

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1} \mid (f_n(x) - f_{n-1}(x)).$$

$\boxed{\text{質數分佈猜想}}$

我們用符號 $\pi(x)$ 代表不大於 x 的質數個數；例如

$$\pi(4) = 2, \pi(7) = 4, \pi(12) = 5, \cdots.$$

關於 π 函數最有名的猜想是：對任何正數 x 與 y 是否

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$$

恆成立。這是一則很難的數論問題，有一些數學家認為這個猜想是錯誤的，正確的敘述應該是如下：

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + 2\pi(y/2).$$

直到今天，這兩則猜想是否成立仍然不知道。數學家蒙哥馬利，塞爾伯格及范昂曾經證明過如下的定理：

$$\pi(x+y) < \pi(x) + \frac{2y}{\log y}.$$

關於 π 函數，我們有如下的表示式（讀者可嘗試證明此公式）：若 x 為正整數 $(x \geq 2)$ 則

$$\pi(x) = \sum_{k=2}^{x} \left[\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] \right],$$

這裡的符號 [ ] 代表高斯記號。與 π 函數相關所知道最有名的結果是貝特朗假設：對任意大於 1 的正整數 n 必存在一個質數介於 n 與 $2n$ 之間，即

$$\pi(2n-1) - \pi(n) \geq 1.$$

這個假設是十九世紀的數學家貝特朗提出的；之後被數學家謝瓦萊證明是正確的。