

國立台灣師範大學數學系
九十學年度推薦甄選入學
指定項目甄試試題

壹、計算證明題（考試時間：2 小時）：

- 一、甲乙兩人玩數字遊戲：甲先想定一個介於 1000 與 1200 之間的整數，並告訴乙此數被 5 除餘 2、被 7 除餘 3、被 9 除餘 1，要乙猜此數是什麼。乙卻說沒有這樣的整數。你認為乙的答案正確嗎？試說明你的理由。
- 二、將 n 位學生分成 A 、 B 兩組，使 A 組至少有 2 位學生而 B 組至少有 3 位學生。設 a_n 表示此種分組的方法數，試求滿足 $a_n \geq 2001$ 的最小正整數 n 之值。
- 三、已知過點 $(0, 1, 2)$ 有兩條直線完全落在二次方程式

$$3x^2 + 5y^2 + z^2 - 8zx + 8xy = 9$$

的圖形上，試求包含這兩直線的平面方程式。

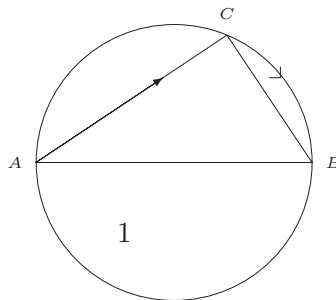
- 四、在兩曲線的每個交點處分別作兩曲線的切線，若兩切線互相垂直，則稱這兩曲線正交。在直角坐標平面上，試求與下列三圓都正交的圓方程式：

$$C_1 : x^2 + y^2 - 10x + 16y + 53 = 0,$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0,$$

$$C_3 : x^2 + y^2 - 4x + 10y - 1 = 0.$$

- 五、林先生在一圓形湖休閒區預備進行划船與慢跑運動。他先由湖畔的 A 點沿直線划船到湖邊的某個點 C ，再上岸沿湖邊慢跑到 B 點，如下圖中箭頭所示，其中 AB 為湖的直徑。已知他划船速度為每小時 3 公里，慢跑速度為每小時 6 公里，問 C 點位於何處時，林先生運動的時間最長？



貳、填充題（考試時間：120 分鐘）：

- 一、將符號 + 與 - 作重覆排列，使其中沒有連續三項為 + + + 或 - - -。令 a_n 表示項數為 n 且末兩項為 + + 或 - - 的排法總數， b_n 表示項數為 n 且末兩項為 + - 或 - + 的排法總數。以 a_n 與 b_n 表示 a_{n+1} 與 b_{n+1} ，得 $a_{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b_{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 二、設 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。若 $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ ， $f(\beta) = \frac{1}{3}$ ，則 $f(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 三、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，且其周長為 $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 四、在空間中，以 z 軸為中心軸且半徑為 1 的圓柱，被平面 $x + 2z = 6$ 所截，截痕為一橢圓。試問此橢圓的長短軸長度的比值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 五、稜長皆為 1 的正四角錐，與稜長皆為 1 的正四面體，它們體積的比值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 六、擲一不公正銅板 2 次，得一正一反的機率是 0.4，則擲此銅板 4 次得二正二反的機率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 七、函數 $y = \frac{1}{\pi}x^2$ 之圖形與函數 $y = \frac{\pi}{4}\sin x$ 之圖形所圍成區域的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 八、一長方體游泳池長 50 公尺，寬 24 公尺，深 2 公尺。現在要將裝滿這個游泳池的水全部從游泳池的上緣抽出，則所做的功為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 焦耳。