

台灣大學數學系  
九十學年度申請入學筆試試題

壹、筆試一試題：說明：每題 25 分。答題時，計算題要有計算過程，證明題要說明清楚。計算或證明不完全者，會視情況部分給分。

1. 求  $x^{100} + 1$  除以  $x^3 + x^2 + x$  的餘式。

2. 求集合

$$\left\{ 18n^4 + 2n^3 - 189n^2 \mid n \text{ 為整數} \right\}$$

中的最小元素。

3. 假設某社區為一三角形區域，包含  $\triangle ABC$  及內部。在頂點  $A, B, C$  各有一家便利商店。住家  $P$  的便利指標為  $P$  到  $A, B, C$  三點的最短距離，此距離越長買東西越不方便。

(a) 試證：當  $\triangle ABC$  為銳角三角形時，買東西最不方便的住家位於  $\triangle ABC$  的外心。

(b) 試問：當  $\triangle ABC$  為鈍角三角形時，買東西最不方便的住家位於何處？請畫一三角形，圖示出答案並證明之。

4. 甲、乙兩人競選某縣縣長，已知甲得  $n$  票，乙得  $m$  票，且  $n > m$ 。

(a) 求  $m = 1$  時，開票過程中甲一路領先（平手不算領先）到底的機率。

(b) 求  $m = 2$  時，開票過程中甲一路領先到底的機率。

(c) 根據  $m = 0, 1, 2$  時，甲一路領先到底的機率，猜測  $m$  為一般的正整數時，甲一路領先到底的機率，並證明之。

貳、筆試二試題：每題 25 分。答題時，計算題要有計算過程，證明題要說明清楚。計算或證明不完全者，會視情況部分給分。

1.  $x$  滿足方程式  $\tan(\pi \cot x) = \cot(\pi \tan x)$ ，求  $\tan x$  之值。

2. 求集合

$\{b|b \text{ 為正整數，且存在正整數 } a \text{ 使得有理數 } a/b \text{ 之循環節長為 } 3\}$   
中的最小元素。

3. 設實係數多項函數  $f(x)$  滿足下面 (a), (b) 的條件：

(a)  $(0, f(0))$  為圖形  $y = f(x)$  的反曲點。

(b)  $(1, f(1))$  為圖形  $y = f(x)$  的反曲點。

問： $f(x)$  在閉區間  $[0, 1]$  中是否一定有極值（極大值或極小值）？請解釋之。

4. 已知錐面  $z^2 = x^2 + y^2$  與平面  $7y - z + 24 = 0$  的相交曲線是雙曲線，以  $\Gamma$  稱呼之

(a) 已知  $\Gamma$  在  $xy$  平面上之投影為一雙曲線，請寫出其標準式。

(b) 求  $\Gamma$  的兩個頂點。

(c) 求  $\Gamma$  的貫軸所在之直線方程式或者一條漸進線之方程式。

(d) 求  $\Gamma$  的焦點。