台灣大學數學系
九十一學年度學士班申請入學筆試試題
指定項目甄試試題

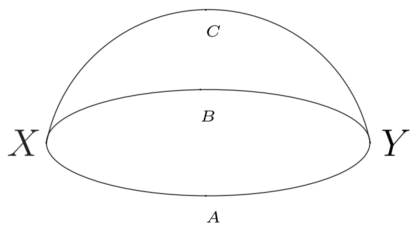
（南婷婷解答，許志農修飾）

數學（一）

說明: 每題 20 分。答題時，計算題要有計算過程，證明題要論證清晰完整。請儘量作答，計算或證明不完全者，可就正確部分得部分分數。

1. 試求出所有整數 a, b, c 使得
$$\frac{36}{385} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7} + \frac{c}{11},$$
且 $|a| < 5, |b| < 7, |c| < 11$。

2. 下圖為一立體框架。其中 $\widehat{XAY}, \widehat{XBY}, \widehat{XCY}$ 皆為長度 l 之圓弧，而 X, Y 為三圓弧相交之三叉點，且 A 為弧 $\widehat{XAY}$ 之中點。現有一螞蟻由 A 點出發往 X 點爬行。假設牠一直往前行，絕不回頭。到了三叉點，牠隨機地由兩條路中選一條（因此機率各為 $\frac{1}{2}$），繼續往前。在此情況下，若是牠又回到 A，則其爬行距離之期望值為何？



3. 令 a, b, c 為三角形之三邊長。試證明：
$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$
並證明：“等號成立”若且唯若“三角形為等邊三角形”。

4. 平面上有一 n 邊形區域 $P_1P_2P_3\cdots P_n (n \geq 3)$，其頂點為 $P_j = (x_j, y_j)$ $(j = 1, 2, 3, \cdots, n)$。有人提出多邊形區域的面積應是

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j)$$

（此處規定 $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$）。但因面積是『正的』，而公式中的答案可能為負，那麼應該如何修正才好？並請證明你所給的公式。

5. 如果平面上之點 P 的座標 (x, y) 都是整數，我們稱之為格子點。現在假設平面上有一個 n 邊形區域 $P_1P_2P_3\cdots P_n (n \geq 3)$，其頂點 P_j 都是格子點。我們算出它在週邊上有 l 個格子點，而在多邊形內部（邊上不算）有 k 個格子點。你能夠用 k, l 表達出這 n 邊形區域的面積嗎？並請證明你所給的答案。

數學（二）

說明: 每題 20 分。答題時，計算題要有計算過程，證明題要論證清晰完整。請儘量作答，計算或證明不完全者，可就正確部分得部分分數。

1. 考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\cdots P_n(n\geq 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。試證明：她的領海面積是
$$(p+\pi d)d.$$

2. 令 $L: x+2y=4$ 為平面上一直線，且 R_L 是個以 L 為鏡面的鏡射。請問：是否存在一矩陣 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$，使得鏡射 R_L 將平面上任一點 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ 對應至
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}?$$
若存在，試求 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$。

3. 令 $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), Q(x)$ 為複係數之多項式，且滿足
$$\begin{aligned} &P_1\left(x^5\right)+xP_2\left(x^5\right)+x^2P_3\left(x^5\right)+x^3P_4\left(x^5\right) \\ &=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)Q(x). \end{aligned}$$
證明：$(x-1)$ 是 $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), Q(x)$ 之因式。

4. 證明：
$$\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cos^2 3\theta+\cdots+\cos^2 n\theta=\frac{n}{2}+\frac{\sin n\theta\cos(n+1)\theta}{2\sin\theta}.$$

5. 某國的沙漠中有 A, B, C 三個綠洲，這裡把它們都看成“點”，而這三個點形成銳角三角形。現國王打算選擇一點 P 作為控管中心，選擇的條件是 P 到三點的距離總和 $PA+PB+PC$ 為最小。試證明：對此點 P，滿足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$。請問：如何用幾何作圖（只用圓規直尺）得到這一點 P。如果不是銳角三角形，則又如何？

數學（一）參考解答

1. 因為 $\frac{36}{385}=\frac{a}{5}+\frac{b}{7}+\frac{c}{11}=\frac{77a+55b+35c}{385}$，所以

$$\begin{aligned}77a+55b+35c=36 &\Rightarrow 77a-36=5(11b+7c)\\ &\Rightarrow 5|(77a-36)\\ &\Rightarrow 5|(2a-1).\end{aligned}$$

又 $|a|<5$，即 $-5<a<5$，故 $a=-2$ 或 3。

(1) 當 $a=-2$ 時，得到 $55b+35c=190$，即

$$11b+7c=38 \Rightarrow b=3+\frac{5-7c}{11}.$$

又 $|b|<7, |c|<11$，解得 $(b,c)=(-4,7)$ 或 $(6,-4)$。
故這種情形得到兩組解為

$$(a,b,c)=(-2,-4,7),\quad (-2,6,-4).$$

(2) 當 $a=3$ 時，得到 $55b+35c=-195$，即

$$11b+7c=-39 \Rightarrow b=-4+\frac{5-7c}{11}.$$

又 $|b|<7, |c|<11$，解得 $(b,c)=(-1,-4)$。故

$$(a,b,c)=(3,-1,-4).$$

綜合得到三組解為

$$(a,b,c)=(-2,-4,7),\quad (-2,6,-4),\quad \text{或}\quad (3,-1,-4).$$

2. 走到 A 的路徑分成兩種：
(1)：由 Y 到 A：這種的爬行距離之期望值為

$$\begin{aligned}S_1 &= 1\cdot\frac{1}{2}(2l)+1\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2(4l)+\cdots\\ &=\left(2\cdot 2^{-1}+4\cdot 2^{-3}+6\cdot 2^{-5}+\cdots\right)l.\end{aligned}$$

將 S_1 乘以 $\frac{1}{4}$ 得到

$$\frac{S_1}{4}=\left(2\cdot 2^{-3}+4\cdot 2^{-5}+6\cdot 2^{-7}+\cdots\right)l.$$

兩式相減得到

$$\begin{aligned}\frac{3S_1}{4} &= \left(2\cdot 2^{-1} + 2\cdot 2^{-3} + 2\cdot 2^{-5} + \cdots\right) l \\ &= \frac{2\cdot 2^{-1}}{1-2^{-2}} l \\ &= \frac{4}{3} l.\end{aligned}$$

因此 $S_1 = \frac{16}{9} l$。

(2)：由 X 到 A：這種的爬行距離之期望值為

$$S_2 = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(3l) + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 (5l) + \cdots .$$

仿 (1) 的方法，求得

$$S_2 = \frac{11}{9} l.$$

綜合 (1) 與 (2) 得到，螞蟻爬行距離之期望值為

$$S_1 + S_2 = \frac{16}{9} l + \frac{11}{9} l = 3l.$$

3. 將三個算-幾不等式

$$\begin{cases} a &= \frac{2a}{2} = \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} \geq \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \\ b &= \frac{2b}{2} = \frac{(b+c-a)+(a+b-c)}{2} \geq \sqrt{(b+c-a)(a+b-c)} \\ c &= \frac{2c}{2} = \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} \geq \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \end{cases}$$

相乘得到

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

4. 面積公式應該為該公式取絕對值，即

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) \right| .$$

原因是這樣的：設 $O(0,0)$，由原點 O, P_j, P_{j+1} 三點所圍成的

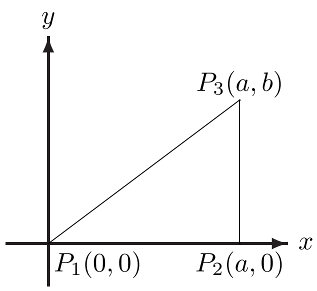
三角形面積為

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}OP_j \times OP_{j+1}\sin\angle P_jOP_{j+1} \\
&\qquad = \frac{1}{2}OP_j \times OP_{j+1}\sqrt{1-\cos^2\angle P_jOP_{j+1}} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{OP_j^2 \times OP_{j+1}^2 - (OP_j \times OP_{j+1}\cos\angle P_jOP_{j+1})^2} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{\left(x_j^2+y_j^2\right)\left(x_{j+1}^2+y_{j+1}^2\right) - (\overrightarrow{OP_j}\cdot\overrightarrow{OP_{j+1}})^2} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{\left(x_j^2+y_j^2\right)\left(x_{j+1}^2+y_{j+1}^2\right) - (x_jx_{j+1}+y_jy_{j+1})^2} \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left|x_jy_{j+1}-x_{j+1}y_j\right|.
\end{aligned}
$$

以原點 O 為中心，當 P_j 至 P_{j+1} 是逆時鐘方向時，$x_jy_{j+1}-x_{j+1}y_j$ 是正的值；反之，是負的值。根據這個原理知道，n 邊形區域的面積應為

$$
\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_jy_{j+1}-x_{j+1}y_j)\right|.
$$

5. 在此，我們證明比較簡易的版本，原題只需將簡易版本稍作歸納即可：
   如下圖所示，直角三角形 $P_1P_2P_3$ 的座標 $P_1(0,0), P_2(a,0), P_3(a,b)$，其中 a,b 是正整數，而 a 與 b 互質。



令

$S=$ 直角三角形 $P_1P_2P_3$ 的面積;
$I=$ 直角三角形 $P_1P_2P_3$ 內部（不含邊上）的格子點數;
$L=$ 直角三角形 $P_1P_2P_3$ 邊上的格子點數.

(1) 求 S, L 的值（用 a, b 符號表示）。

(2) 求 I 的值（用 a, b 符號表示）。

(3) 將直角三角形 $P_1P_2P_3$ 的面積表為 I 與 L 的公式（公式中不可以使用 a, b 符號）。

〔解〕作法如下：

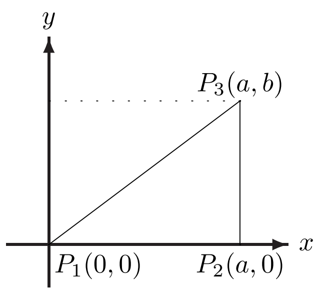
(1) 直角三角形 $P_1P_2P_3$ 的面積

$$S = \frac{ab}{2};$$

而 $P_1P_2P_3$ 邊上的格子點數 L 求法如下：線段 P_1P_2 上有 $a+1$ 個格子點；線段 P_2P_3 上有 $b+1$ 個格子點；由 a 與 b 互直的關係知道，線段 P_1P_3 上，除了 P_1, P_3 兩個個子點之外，無其它個子點，故線段 P_1P_3 上恰有 2 個格子點。綜合得到，直角三角形 $P_1P_2P_3$ 邊上的格子點數

$$L = (a+1) + (b+1) + 2 - 3 = a + b + 1.$$

(2) 考慮下圖中的輔助線：



矩形的內部一共有

$$(a-1)(b-1)$$

個格子點。又對角線 P_1P_3 上，除端點外都不是格子點，故左上直角三角形與右下直角三角形（也就是 $P_1P_2P_3$）內部的格子點數和為 $(a-1)(b-1)$。故直角三角形 $P_1P_2P_3$ 內部（不含邊上）的格子點數 I 為

$$I = \frac{(a-1)(b-1)}{2} = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$$

(3) 由 S, L, I 的公式

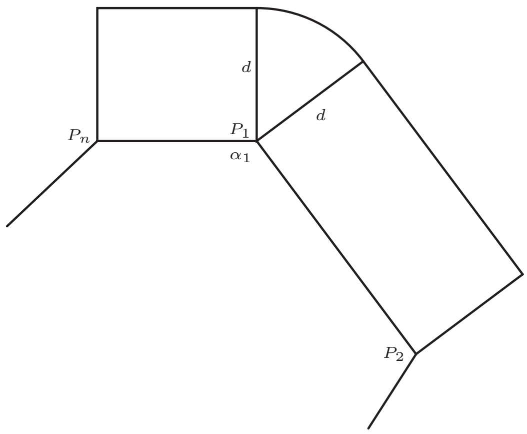
$$
\begin{aligned}
S &= \frac{ab}{2} \\
L &= a + b + 1 \\
I &= \frac{ab - a - b + 1}{2}
\end{aligned}
$$

得到

$$S = \frac{L}{2} + I - 1.$$

數學（二）參考解答

1. 如下圖所示，令凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\cdots P_n$ 的 P_i 所對應的內角為 α_i。



領海是由 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形及頂點 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形面積和為

$$(P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_nP_1)d = pd.$$

頂點 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積和為

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)\frac{\pi d^2}{2\pi} &= (n\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n))\,\frac{\pi d^2}{2\pi}\\ &= (n\pi-(n-2)\pi)\,\frac{\pi d^2}{2\pi}\\ &= \pi d^2.\end{aligned}$$

故領海面積為

$$pd+\pi d^2 = (p+\pi d)d.$$

2. 設原來的點 (x, y)，鏡射之後的點 (x', y')。由

$$\frac{x+x'}{2} + 2\cdot\frac{y+y'}{2} = 4$$

得到

$$(x+x')+2(y+y')=8. \tag{1}$$

又由

$$\frac{y'-y}{x'-x}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

得到

$$(y-y')=2(x-x'). \tag{2}$$

由 (1) 及 (2) 得到

$$\begin{cases} x'+2y'=8-x-2y \\ 2x'-y'=2x-y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{3x-4y+8}{5} \\ y'=\frac{-4x-3y+16}{5} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix}.$$

3. 我們證明比較簡易的版本，原題目的證明是類似的，留給讀者！我們的版本為：
令 $P_1(x), P_2(x), P_3(x), Q(x)$ 為複係數之多項式，且滿足

$$P_1\left(x^4\right)+xP_2\left(x^4\right)+x^2P_3\left(x^4\right)=\left(x^3+x^2+x+1\right)Q(x).$$

證明：$(x-1)$ 是 $P_1(x), P_2(x), P_3(x), Q(x)$ 之因式。
〔證明〕將 $x=i, -1=i^2, -i=i^3$ 及 $1=i^4$ 分別代入等式中，得到

$$\begin{aligned} P_1(1)+iP_2(1)-P_3(1)&=0; \\ P_1(1)-P_2(1)+P_3(1)&=0; \\ P_1(1)-iP_2(1)-P_3(1)&=0; \\ P_1(1)+P_2(1)+P_3(1)&=4Q(1); \end{aligned}$$

將第一式與第三式相減得到

$$2iP_2(1)=0\Rightarrow P_2(1)=0.$$

由第一式，第二式及 $P_2(1)=0$ 知道 $P_1(1)=P_3(1)=0$。將 $P_1(1)=P_2(1)=P_3(1)=0$ 代入第四式得到 $Q(1)=0$。根據餘

式定理，$x-1$ 是 $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ 與 $Q(x)$ 的因式。
〔註〕原題應分別代入 $x^5=1$ 的五個根。解題過程比上述複雜許多，但道理是一致的。

4. 利用數學歸納法：
(1)：當 $n=1$ 時

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\theta\cos 2\theta}{2\sin\theta},$$

等式成立。
(2)：假設 $n=k$ 時成立，即

$$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 k\theta = \frac{k}{2} + \frac{\sin k\theta\cos(k+1)\theta}{2\sin\theta}.$$

當 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 k\theta + \cos^2(k+1)\theta \\
&= \frac{k}{2} + \frac{\sin k\theta\cos(k+1)\theta + 2\sin\theta\cos^2(k+1)\theta}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{\cos(k+1)\theta\,(\sin k\theta + 2\cos(k+1)\theta\sin\theta)}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{\cos(k+1)\theta\,(\sin k\theta + \sin(k+2)\theta - \sin k\theta)}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{\cos(k+1)\theta\sin(k+2)\theta}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k+1}{2} + \frac{\cos(k+2-1)\theta\sin(k+2)\theta - \sin\theta}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k+1}{2} + \frac{(\cos(k+2)\theta\cos\theta + \sin(k+2)\theta\sin\theta)\sin(k+2)\theta - \sin\theta}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k+1}{2} + \frac{\cos(k+2)\theta\cos\theta\sin(k+2)\theta + \sin\theta\left(\sin^2(k+2)\theta - 1\right)}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k+1}{2} + \frac{\cos(k+2)\theta\cos\theta\sin(k+2)\theta - \sin\theta\cos^2(k+2)\theta}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k+1}{2} + \frac{\cos(k+2)\theta(\sin(k+2)\theta\cos\theta - \cos(k+2)\theta\sin\theta)}{2\sin\theta} \\
&= \frac{k+1}{2} + \frac{\cos(k+2)\theta\sin(k+1)\theta}{2\sin\theta},
\end{aligned}$$

得證。

5. 作圖步驟：

(1) 以 AB, AC 為邊長向外作兩個正三角形 ABA' 與 ACA''。

(2) 連接線段 $A'C$ 與 $A''B$，令其交點為 P。點 P 就是所要求的點。

〔證〕因為 ABC 是銳角三角形，所以必有一角不超過 60°，令 $\angle ABC \leq 60^\circ$。分三階段證明如下：

(1) 因為三角形 $A'AC$ 與三角形 BAA'' 全等（SAS 全等），所以 $\angle AA'C = \angle ABA''$，推得 $\angle A'PB = \angle A'AB = 60^\circ$。同理 $\angle A''PC = 60^\circ$（$\angle A'PB$ 的對頂角）。故

$$\angle A'PB = \angle A''PC = 60^\circ.$$

(2) 因為 $\angle A'PB = 60^\circ$，所以在 PA' 上取一點 P' 使得 $PP' = PB$，那麼三角形 $PP'B$ 為正三角形。故 $\angle A'BP' = 60^\circ - P'BA = \angle ABP$。因此三角形 $A'BP'$ 與三角形 ABP 全等（SAS 全等）。又由 $\angle A'P'B = 120^\circ$（因為 PBP' 為正三角形）得到 $\angle APB = 120^\circ$。同理可得 $\angle APC = 120^\circ$。故

$$\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ.$$

(3) 由 (1) 與 (2) 得到

$$AP + BP + CP = A'P' + P'P + PC = A'C.$$

現在假設 O 是銳角三角形內部的一點，在三角形 $A'BA$ 內部或邊上取一點 O' 使得三角形 $O'OB$ 為正三角形，此時三角形 $A'BO'$ 與三角形 ABO 全等。故

$$AO + BO + CO = A'O' + O'O + OC \geq A'C,$$

得證。