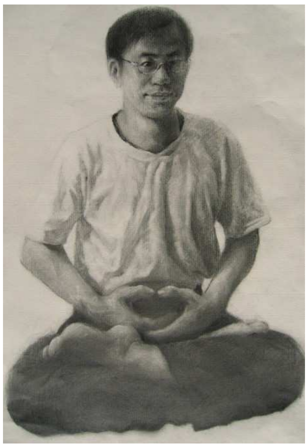
1　在數線上跳曼波



數學經文

直線是什麼呢？它就像“時間”這問題一樣，時間讓人感覺很平凡，但“時間是什麼？”卻讓人難以回答。養成對直線具有穿透力的洞見是需要的。走直線需要努力與勇氣，現在就讓我們開始！

音樂是由聲音與寧靜所組成的，它不只是聲音，它還包含了寧靜；而直線卻被需要的點與空隙（不需要的點）填滿。抓住需要的點與掌握空隙是探索直線的初步。但唯有領悟出“需要的點其實是不需要的點，不需要的點（空隙）才是需要的點”時，直線才能與你共舞，直線的平凡性才會像種子般深植你的腦海裡，時時開花，處處結果。

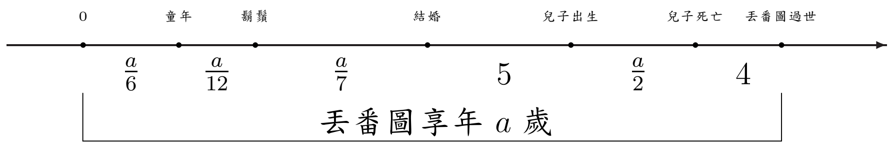
題目：　數學兼哲學家伽利略，於公元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁。出版《對話錄》一書到在獄中過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。

年輕的伽利略發明十倍率的望遠鏡，並在隔年發現木星的第一顆衛星（後人稱為歐羅巴衛星）。發現衛星到接受審判剛好是他被監禁時間的三倍。事實上，發明望遠鏡到出版《對話錄》算是伽利略的黃金歲月，這段時間正好是他發現衛星時年齡的一半。試問：伽利略在哪一年發現歐羅巴衛星？

代數學鼻祖丟番圖的年齡問題「他的生活中，童年佔去六分之一，又過了十二分之一長出鬍鬚，再過了七分之一他結了婚，五年之後生下兒子，但是兒子的壽命只有他的一半，在兒子死後四年，他也過世了。求丟番圖的年齡。」是中學生耳熟能詳的算術問題。

據說聖奧古斯丁曾經說過：“每一個人都知道時間是什麼，我也知道時間是什麼，但是當有人問我：「時間是什麼？請你解釋

給我聽。」那麼我就不知所措了。” 對學數學的人來說，數線是用來描述時間再好不過的工具了。例如：正方向的數線就好像人的年齡成長一樣，凡是走過，必在數線上的某個點留下痕跡。所以數線是用來刻畫與紀錄人生最好不過的線了！現在就讓我們來描繪丟番圖的年齡數線圖：



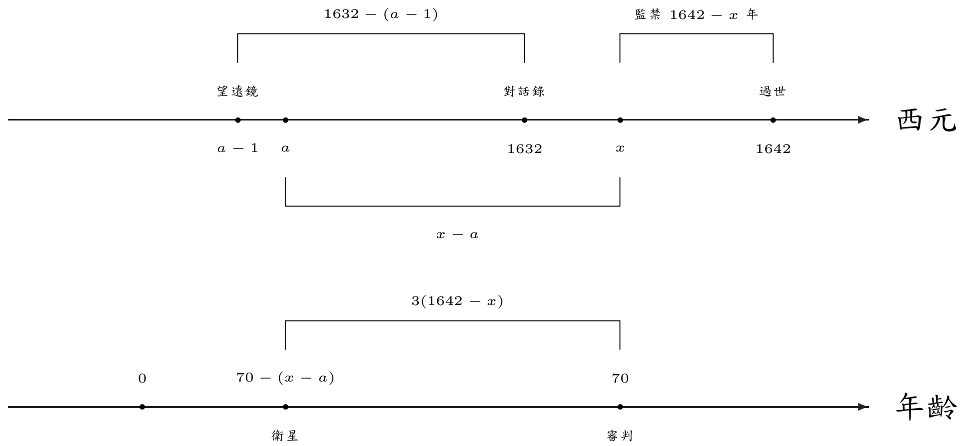
由上述時間對照表得到方程式

$$a=\frac{a}{6}+\frac{a}{12}+\frac{a}{7}+5+\frac{a}{2}+4\Rightarrow a=84.$$

在丟番圖的年齡數線圖中，丟番圖的出生、童年、鬍鬚、結婚、兒子出生、兒子死亡、丟番圖過世這些點是需要的點，而其間的空隙是不需要的點。但是解題所列的方程式中，空隙反而變成重要的點，那些需要的點反而變成不需要的點了。

1.1 讓生命在數線上漫步

本章問題的解答：設伽利略於公元 x 年接受審判，而在公元 a 年發現衛星。將伽利略的年齡與公元的時間這兩條數線繪圖比較如下：



由上述時間對照表得到方程組

$$\begin{cases} 3(1642-x)=(x-a) \\ 1632-(a-1)=\dfrac{70-(x-a)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=a+4926 \\ x=3a-3196 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1634, \\ a=1610. \end{cases}$$

因此伽利略在公元 1610 年發現歐羅巴衛星。 $\boxtimes$

練習 1 龍師父對虎徒弟說：「我在你這個年齡時，你只有兩歲；等你到我這個年紀時，我就 41 歲了。」試問龍師父與虎徒弟現年各幾歲？

1.2 遲疾之律，非出神怪，有形可檢，有數可推

中國南北朝數學家祖沖之說：「遲疾之律，非出神怪，有形可檢，有數可推。」大意是說：「天體運行的規律，不是什麼神怪、不可捉摸的東西，而是有形體可供觀察檢驗，且有數據可以計算推測的。」天體（太陽、地球、彗星等）運行是有週期性的，而且可以量化，並用科學方法得到的！

例題 1 哈雷在他的好朋友牛頓的協助之下，成功地計算出一顆彗星（就是有名的哈雷彗星）將於 1758 年光臨地球，而且這是它在第十八世紀唯一的一次光臨，同時他們也算出下世紀也僅會光臨一次。已知哈雷彗星的週期 P 剛好是整數年，而且第十八世紀是指西元 1701 年至西元 1800 年。

(1) 根據上述資料推論 $P \geq 72$。

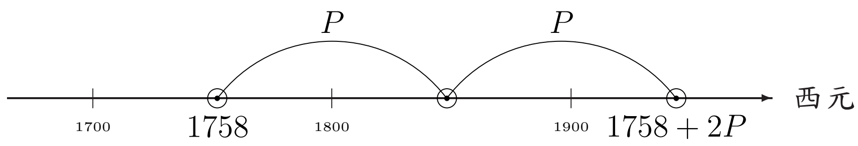
(2) 中國的天文學家，在第十七世紀裡，一共觀測到哈雷彗星光臨地球兩次。試據此推論 $P \leq 78$。

(3) 事實上，中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久，翻開歷史記錄得知：此顆彗星在第十四世紀也是光臨地球兩次；但是在第十一及十二世紀時，哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已。你是

否能根據這些資料，列舉出哪些從 (1) 及 (2) 所得到的 P 值是不合的，並算出哈雷彗星的真正週期？

〔解〕分析如下：

(1) 將彗星出現的數線圖描繪如下：

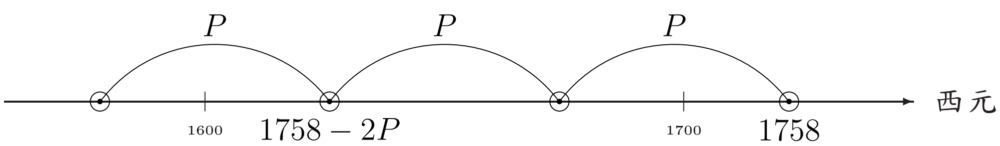


因為下一次出現落在 1801 年至 1900 年之間，再次出現是 1901 年以後的事了。由此推得不等式

$$1758 + 2P \geq 1901 \Rightarrow P \geq 71.5.$$

因為週期 P 是個正整數，所以 $P \geq 72$。

(2) 將彗星出現的數線圖描繪如下：



因為上兩次出現落在 1601 年至 1700 年之間，再上次出現是 1600 年以前的事了。由此推得不等式

$$1758 - 2P \geq 1601 \Rightarrow P \leq 78.5.$$

因為週期 P 是個正整數，所以 $P \leq 78$。

(3) ①若 $P = 72$，則哈雷彗星在 1110 年與 1182 年將兩度光臨第十二世紀（與觀測不符）。
②若 $P = 73$，則哈雷彗星在 1101 年與 1174 年將兩度光臨第十二世紀（與觀測不符）。
③若 $P = 74$，則哈雷彗星在 1018 年與 1092 年將兩度光臨第十一世紀（與觀測不符）。

④若 $P=75$，則哈雷彗星在 1008 年與 1083 年將兩度光臨第十一世紀（與觀測不符）。
⑤若 $P=77$，則哈雷彗星在第十四世紀僅光臨地球一次（在 1373 年），與觀測不符。
⑥若 $P=78$，則哈雷彗星在第十四世紀僅光臨地球一次（在 1368 年），與觀測不符。
⑦若 $P=76$，則哈雷彗星光臨地球的次數與觀測的相符。

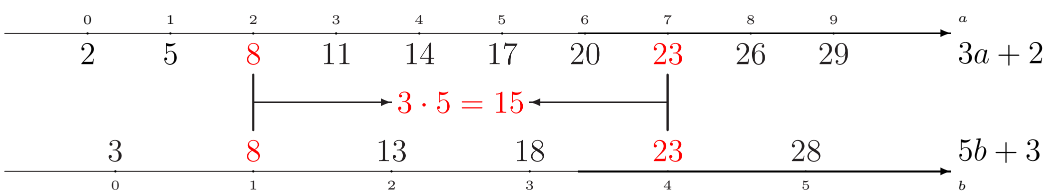
綜合得到，哈雷彗星的週期為 76 年。

$\boxtimes$

1.3 剩餘定理在中學的餘暉⋯研究那不可研究的空隙

「今有物不知其數，三三數之剩二；五五數之剩三；七七數之剩二。問物幾何？」是《孫子算經》的“物不知其數”問題，用現代語言就是，“現有一堆東西不知多少，被 3 除餘 2；被 5 除餘 3；被 7 除餘 2。問這些東西有多少？”。

被 3 除餘 2 的整數可以表成 $3a+2$ 的型式；同樣的，被 5 除餘 3 的整數可以表成 $5b+3$ 的形式。如何求這兩個式子的共同項呢？讓我們用數線來解釋吧！



從兩條數線得知，第一個共同項是 8，而下一個共同項與 8 的差必須是 3 與 5 的最小公倍數（因為第一條數線的點每次跳 3，第二條數線的點每次跳 5），又 3 與 5 的最小公倍數是 15，所以第二個共同項為 $8+15$，⋯。依此得到：$3a+2$ 與 $5b+3$ 的共同項為

$$8, 23=8+15, 38=23+15, 53=38+15, \cdots,$$

即被 3 除餘 2 與被 5 除餘 3 的共同數可以整合成「被 15 除餘 8 的數」。

"物不知其數" 的問題剩下的工作就是求被 15 除餘 8 與被 7 除餘 2 的共同數。仿前一段的方法：

① 先求出一共同項：
因為 "被 15 除餘 8" 的數每次跳 15，而 "被 7 除餘 2" 的數每次只跳 7，所以從 "被 15 除餘 8" 的數找可以比較快找到共同項，其前幾項為

$$8, 23, 38, \cdots.$$

因為第二項 23 被 7 除餘 2，所以 23 是第一個共同項。

② 寫下前幾個共同項的數：
因為第二個共同項與 23 的差必須是 15 與 7 的最小公倍數，又 15 與 7 的最小公倍數是 105，所以第二個共同項為 $23+105=128$。因此前幾個共同項的數為

$$23, 128 = 23 + 105, 233 = 128 + 105, \cdots.$$

③ 所有共同項的表示：
由 ② 知道被 15 除餘 8 與被 7 除餘 2 的共同項為「被 105 除餘 23 的數」。

從 "物不知其數" 的問題得知：被 3 除餘 2；被 5 除餘 3；被 7 除餘 2 的共同數為「被 105 除餘 23 的數」，這裡的 105 是 $3, 5, 7$ 的最小公倍數，而 23 是同時滿足三個條件的最小正整數。

練習 **2** 求被 5 除餘 3 與被 8 除餘 6 的共同數。

練習 **3** 有士兵不滿九百人，但超過五百人，每 5 人一數，剩 3 人，每 8 人一數，剩 6 人，每 13 人一數，剩 7 人。問士兵有幾人？

1.4 直線上的空隙

在座標平面上，x 與 y 座標都是整數的點稱為格子點。我們的問題是：如何寫下直線 $13x - 7y + 8 = 0$ 所通過的所有格子點？

如果將直線方程式 $13x-7y+8=0$ 改寫成等式

$$13x+8=7y,$$

那麼“該直線所通過的格子點”就可以解釋成“被 13 除，餘 8 與被 7 除，餘 0 的共同項”了。仿前一節的方法：

① 先求出一共同項：
因為“被 13 除餘 8”的數每次跳 13，而“被 7 除餘 0”的數每次只跳 7，所以從“被 13 除餘 8”的數找可以比較快找到共同項，其前幾項為

$$8, 21, 34, \cdots.$$

因為第二項 21 被 7 除餘 0，所以 21 是第一個共同項。

② 寫下前幾個共同項的數：
因為第二個共同項與 21 的差必須是 13 與 7 的最小公倍數，又 13 與 7 的最小公倍數是 91，所以第二個共同項為 $21+91=112$。因此前幾個共同項的數為

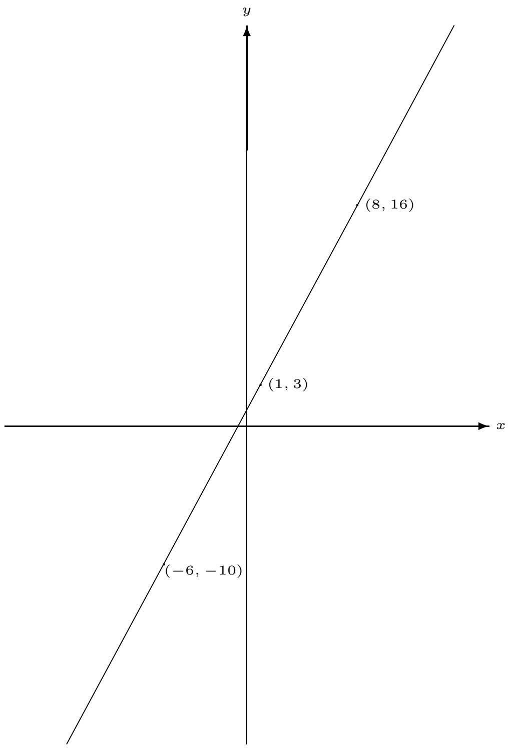
$$21, 112=21+91, 203=112+91, \cdots.$$

③ 所有共同項的表示：
由 ② 知道被 13 除餘 8 與被 7 除餘 0 的共同項為「被 91 除，餘 21 的數」。

④ 所有格子點的表示法（參數表示法）：
由前述知道，$13x+8$ 與 $7y$ 的共同項就是「被 91 除，餘 21 的數」，亦即 $91t+21$ 的形式（其中 t 為整數）。故直線 $13x-7y+8=0$ 通過的格子點為

$$\begin{cases} 13x+8 & =91t+21 \\ 7y & =91t+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7t+1 \\ y=13t+3 \end{cases} \quad (t \text{ 是整數})。$$

我們把直線 $13x-7y+8=0$ 畫在下圖中，通過的格子點 $(-6,-10),(1,3)$ 與 $(8,16)$ 分別對應到 $t=-1,0$ 與 1 的情形：



例題 **2** 將一隻青蛙放在數線上原點處，約定青蛙每次跳動只能 “向右 7 單位或向左 5 單位” 。

(1) 該青蛙如何跳到數線上 3 的位置？

(2) 該青蛙可以跳到數線上任一個正整數的位置嗎？

〔解〕如果青蛙向右跳 x 次，向左跳 y 次，那麼青蛙所在的位置坐標為 $7x-5y$：

(1) 當 $x=4, y=5$ 時，青蛙所在的位置坐標為 $7\cdot 4-5\cdot 5=3$。故青蛙向右跳 4 次，向左跳 5 次時，剛好跳到數線上 3 的位置。

(2) 將 $7x-5y=1$ 移項得 $7x=5y+1$，其共同項為

$$21, 56, 91, \cdots.$$

所以共同項是首項 21，公差 35 的等差數列。故直線 $7x-5y=1$ 通過的格子點為

$$\begin{cases} 7x=35t+21 \\ 5y+1=35t+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5t+3 \\ y=7t+4 \end{cases}$$

由這個通解可以看出，青蛙有無限多種跳法可以跳到 1 的位置（例如，向右跳 3 次，向左跳 4 次）。故對任意正整數 k，當青蛙向右跳 $3k$ 次，向左跳 $4k$ 次時，青蛙剛好跳到數線上 k 的位置。也就是說，青蛙可以跳到數線上任一個正整數的位置。

$\boxtimes$

練習 **4** 求直線 $11x-9y=7$ 所通過的所有格子點。

1.5 等你來瞭解的尤拉分割數列

將 4 表示成正整數的和有多少個方式呢？讓我們列舉看看吧！

$$1+1+1+1,\quad 1+1+2,\quad 1+3,\quad 2+2,\quad 4$$

不考慮次序的話，一共有上述五種不同方式。同樣，將 5 表示成正整數的和一共有

$$1+1+1+1+1,\ \ 1+1+1+2,\ \ 1+1+3,\ \ 1+4,\ \ 1+2+2,\ \ 2+3,\ \ 5$$

等七種不同方式。

練習 **5** 試問將 6 表示成正整數的和有多少不同的表示法（不考慮次序）？

為了方便，定義 $P(n)$ 為“將 n 表示成正整數和（不考慮次序）的方法數”，例如 $P(4)=5, P(5)=7$。

有關分割數列 $\langle P(n)\rangle$，尤拉計算了 $P(1), P(2), P(3), \cdots, P(69)$ 這 69 個值，在 1890 年，MacMahon 計算到 $P(200)$ 得到

$$P(200)=3972999029388.$$

數列 $\langle P(n)\rangle$ 的值隨著 n 的增大，$P(n)$ 快速成長。計算前幾項意義不大，洞察 $P(n)$ 的關係才是研究它的重點。第一位對 $P(n)$ 提出洞見性觀察的是印度數學家拉馬奴姜。他發現“當 n 除以 5 餘 4 時，$P(n)$ 是 5 的倍數；當 n 除以 7 餘 5 時，$P(n)$ 是 7 的倍數；當 n 除以 11 餘 6 時，$P(n)$ 是 11 的倍數”，也就是說

定理 1 (拉馬奴姜定理)

$$5|P(5a+4), \quad 7|P(7b+5), \quad 11|P(11c+6).$$

有了拉馬奴姜定理之後，對 $P(n)$ 的值，有更多的結果：

例題 3 哪些 n 會使 $P(n)$ 是 35 的倍數。

〔解〕當 n 除以 5 餘 4，除以 7 餘 5 時，$P(n)$ 會是 5 與 7 的倍數，即 $P(n)$ 是 35 的倍數。所以除以 5 餘 4，除以 7 餘 5 的正整數 n 是所要的答案。現在利用前一節的方法求這些 n：

① 先求出一共同項：
因為"被 7 除餘 5"的數每次跳 7，而"被 5 除餘 4"的數每次只跳 5，所以從"被 7 除餘 5"的數找可以比較快找到共同項，其前幾項為

$$5, 12, 19, \cdots.$$

因為第三項 19 被 5 除餘 4，所以 19 是第一個共同項。

② 寫下前幾個共同項的數：
因為第二共同項與 19 的差必須是 5 與 7 的最小公倍數，又 5 與 7 的最小公倍數是 35，所以第二共同項為 $19+35=54$。因此前幾個共同項的數為

$$19, 54=19+35, 89=54+35, \cdots.$$

③ 所有共同項的表示：
由 ② 知道被 5 除餘 4 與被 7 除餘 5 的共同項為「被 35 除餘 19 的數」。

因為除以 5 餘 4，除以 7 餘 5 的正整數 n 被 35 除餘 19，且此時的 n 滿足 $35|P(n)$，所以 $35|P(35k+19)$，也就是說，被 35 除餘 19 的 n 會使 $P(n)$ 是 35 的倍數。 ⊠

練習 6 哪些 n 會使 $P(n)$ 是 77 的倍數。

練習 7 哪些 n 會使 $P(n)$ 是 385 的倍數。

1.6 尤拉五角形公式

尤拉數列 $P(n)$ 是否可以用比較小的數

$$P(n-1), P(n-2), \cdots, P(2), P(1)$$

來表示呢？答案是可以的，不過表示法比較複雜。這個複雜的表示公式稱為尤拉五角形公式，它跟五邊形數列 $\left\langle\frac{k(3k+1)}{2}\right\rangle$ 有關，讓我們來欣賞它吧！

將 $\frac{k(3k-1)}{2}$ 與 $\frac{k(3k+1)}{2}$（k 為正整數）的數依小到大列出如下：

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 7,\quad 12,\quad 15, \cdots.$$

尤拉發現分割數列 $\langle P(n)\rangle$ 滿足

$$\begin{aligned} P(n) =&[P(n-1)+P(n-2)]- \\ &[P(n-5)+P(n-7)]+ \\ &[P(n-12)+P(n-15)]- \\ &\cdots, \end{aligned}$$

在這公式裡，規定 $P(0)=1, P(-1)=P(-2)=\cdots=0$，這是有名的「尤拉五角形公式」。

由 $P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3, P(4)=5, P(5)=7$ 及尤拉五角形公式可推得

$$\begin{aligned} P(6) &= [P(6-1)+P(6-2)]-[P(6-5)+P(6-7)] \\ &= [P(5)+P(4)]-[P(1)+P(-1)] \\ &= [7+5]-[1+0] \\ &= 11. \end{aligned}$$

練習 **8** 利用尤拉五角形公式計算 $P(7)$ 與 $P(8)$ 的值。