1 無字證明⋯第三眼的開啟

數學經文

眼睛是靈魂之窗，兩眉之間的第三眼是心靈之窗，唯有藉由眼睛的向外縝密觀察，才能取得養分，透過第三眼的內送滋養心靈。

左眼看到的代數式子與映入右眼的幾何圖形，把這兩眼所看的事物，想像成透過兩眉之間的第三眼，讓它們融合且柔和的在腦海中浮現，就如同 DNA 的雙螺旋般，親密的對應、穩穩的纏繞在一塊，這就是無字勝有字的神奇。

題目： 已知正數 a, A, b, B, c, C 滿足

$$a + A = b + B = c + C = 1.$$

利用幾何圖形證明

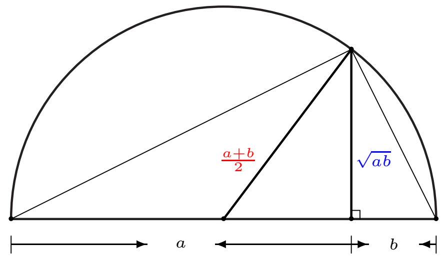
$$aB + bC + cA < 1.$$

無字證明就是將欲證的式子（可能是等式，也可能是不等式）透過維妙維肖的幾何模型來闡釋。不需要透過太多的文字說明，就能清楚洞見欲證式子的正確性。精確的講，當你左眼聚焦於式子，而右眼縝密的觀照幾何模型，會有一種如 DNA 的雙螺旋般的對應與纏繞，透過兩眉之間的第三眼傳入腦海中。這種能力是需要練習的，讓我們進入練習！

1.1 基礎訓練

大家耳熟能詳的無字證明之例子莫過於算幾不等式的證明了，下圖就是算幾不等式的無字證明：

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

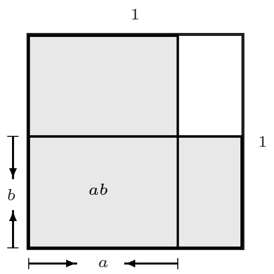


例題 1 設實數 a, b 滿足 $0 < a, b < 1$。請以幾何圖形證明

$$1 > a + b - ab.$$

〔證〕現在請用你的左、右眼觀察下圖中的左邊的不等式與右邊的模型：

$1 > a + b - ab$



你是否看出這例題的無字證明。 ⊠

再做一題練習：

練習 1 已知 a, b 為正實數且滿足

$$a + b = \sqrt{3}.$$

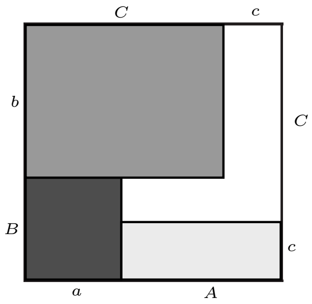
請利用正三角形來證明不等式

$$a + \sqrt{1 + b^2} > 2.$$

1.2 建立問題的幾何模型

本章題目有兩種不同的幾何模型證明方法，一種是正方形模型，另一種為正三角形模型。讓我們一起欣賞這題目的兩種無字證明。

① 正方形模型證法：下圖是邊長為 1 的正方形



因為深淺不一的三塊小矩形之面積和為

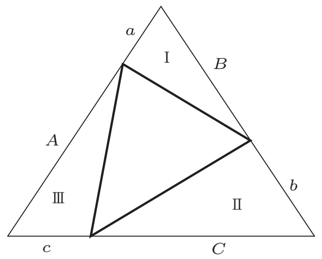
$$aB + bC + cA,$$

所以

$$aB + bC + cA < \text{正方形面積} = 1^2 = 1.$$

⊠

② 正三角形模型證法：下圖是邊長為 1 的正三角形



I 所在區域的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}aB\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}aB;$$

II 所在區域的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}bC\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bC;$$

III 所在區域的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}cA\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}cA.$$

三個小三角形面積和

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(aB+bC+cA)$$

小於邊長為 1 的正三角形面積

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

故

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(aB+bC+cA)<\frac{\sqrt{3}}{4},$$

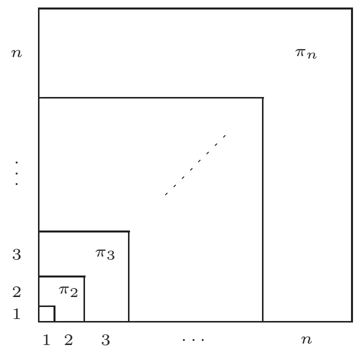
即

$$aB+bC+cA<1.$$

$\boxtimes$

1.3 關於 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ 的無字證明

例題 2 如右圖所示：π_1 是單位正方形面積，π_2 代表邊長 $1+2$ 的正方形扣掉邊長為 1 的正方形面積，π_3 代表邊長 $1+2+3$ 的正方形扣掉邊長為 $1+2$ 的正方形面積，⋯，π_n 代表邊長 $1+2+3+\cdots+n$ 的正方形扣掉邊長為 $1+2+3+\cdots+(n-1)$ 的正方形面積。



(1) 求 π_n 的公式。

(2) 利用 (1) 推導級數和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

的公式。

〔解〕解法如下：

(1) 根據定義

$$
\begin{aligned}
\pi_n &= (1+2+3+\cdots+n)^2 - (1+2+3+\cdots+(n-1))^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} - \frac{n^4-2n^3+n^2}{4} \\
&= n^3.
\end{aligned}
$$

(2) 由 (1) 得到

$$
\begin{aligned}
1^3 &= \pi_1 \\
2^3 &= \pi_2 \\
3^3 &= \pi_3 \\
&\vdots \\
n^3 &= \pi_n.
\end{aligned}
$$

將這些等式相加得到

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_n.$$

因為「$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_n$」剛好是「邊長 $1+2+3+\cdots+n$ 的正方形之面積」，所以

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_n = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.$$

故推得

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

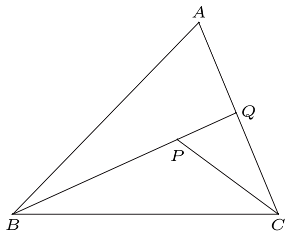
$\boxtimes$

1.4 樞紐定理⋯三角形與橢圓的邂逅

樞紐定理是說：若 P 是三角形 ABC 內部的一點，則

$$PB+PC < AB+AC.$$

我們可以用如下的三角不等式來證明：考慮下圖



由三角形 ABQ 與三角形 QPC 的不等式，得

$$\begin{aligned} AB + AQ &> QB = QP + PB \\ QP + QC &> PC. \end{aligned}$$

將兩式相加並消去共同項 QP，得

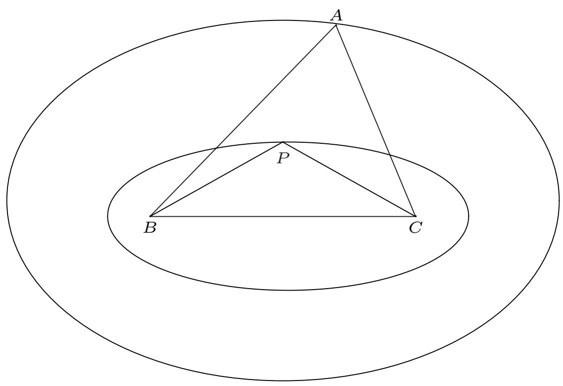
$$AB + AC > PB + PC.$$

這樣就證得樞紐定理。

如果你尚未學過橢圓或橢圓的定義，下一段可以略過：善用橢圓的定義，樞紐定理會變成很容易：

例題 3 利用橢圓的知識證明樞紐定理。

〔證〕到兩個相異點的距離和為一常數的點所形成之圖形稱唯一稱為一個橢圓，這兩個相異點就是所謂的焦點，而常數就是橢圓的長軸。現在以 B, C 為焦點畫兩個橢圓，其中一個通過 A 點，另一個通過 P 點（如下圖所示）



因為 P 點所在的橢圓比較小，A 點所在的橢圓比較大，所以根據定義

$$PB + PC < AB + AC.$$

$\boxtimes$