1　認識證明…頭腦的五種能力之一

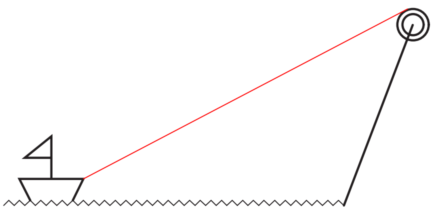
數學經文

　　正確的知識、錯誤的知識、想像、睡覺、和記憶是頭腦的五種能力。頭腦本身既非敵人，亦非朋友，你可以使它成為朋友，你也可以使它成為敵人，它依你而定，依那個隱藏在頭腦背後的你而定。

　　記憶就是過去經驗的喚起，對過去的事情，採取真實而正確的記憶是避免重複犯錯的不二法門。

　　唯有讓頭腦處在正確知識裡，潛意識的直覺（第六感）才會是正確的；意識的推論才會是合乎邏輯的。得到這兩個福報就好像隨身攜帶了火把，無論思緒移動到哪裡，那個黑暗就立刻消失，所到之處都是明亮的，所有的事情都不證自明了。

題目：　如下圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。



問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。

　　當人的頭腦處在正確知識中心時，“直覺、直接的認知”和“合乎邏輯的推論” 就是辯證時，獲得知識的兩大來源。這兩個來源（直覺、直接的認知與合乎邏輯的推論）構成了數學證明的詩篇。想要讓直接的感應產生，合乎邏輯的推論出現，必須讓頭腦變成「證明」的朋友，也就是讓頭腦處於正確知識裡。唯有讓頭腦處在正確知識中，直覺、直接的認知才會像井水般源源不斷的流出，合乎邏輯的推論才會像泉水般一波接著一波的湧現。

讓頭腦儲存或擁有越多數學知識的記憶，使頭腦處在正確知識裡：充足的數學知識，直覺、直接的認知加上合乎邏輯的推論讓我們對數學證明充滿信心。現在就讓我們的頭腦處在正確的知識中心裡！

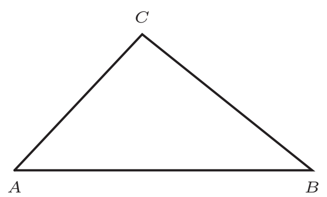
1.1 三角形的不等式

當你欲從 A 地走到 B 地時，心裡清楚選擇兩地間的直線來走最短，而不會選擇弧線或彎曲的路徑前往。這是因為三角形的不等式這粒種子，不僅早已播種在你的腦海裡，還長出了芽，甚至開了花、結了果。但是偶而還是會忘記它的存在，特別是在沒有知覺的情境之下。

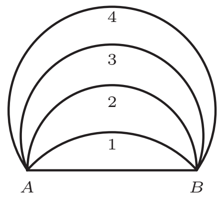
① 直角座標平面的不等式：
在〈圖一〉的三角形 ABC 中，邊長 AB, BC, AC 滿足“兩邊之和大於第三邊”與“兩邊的差小於第三邊”的三角形不等式，也就是

$$AC + BC > AB \quad \text{與} \quad |AC - BC| < AB.$$

② 地球表面的不等式：
設 A, B 是地球上的兩個點，顯然圓弧 1 的半徑＞圓弧 2 的半徑＞圓弧 3 的半徑＞圓弧 4 的半徑，但是圓弧 1 的長度＜圓弧 2 的長度＜圓弧 3 的長度＜圓弧 4 的長度。也就是說，走半徑最大的圓弧，經過的路徑最短（這是因為半徑越大，其圓弧越接近直線）。因此，飛機從 A 飛到 B 時，經常選擇地球的大圓來飛行，這樣最節省時間。

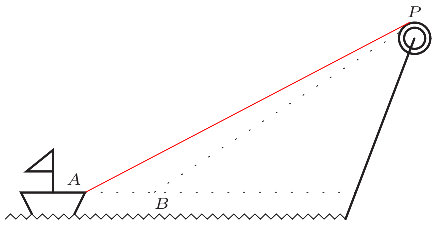


〈圖一〉



〈圖二〉

接下來就讓我們利用三角形的不等式來解決本節的問題：如下圖所示



滑輪捲動的繩子長度為

$$|PA - PB|;$$

而輪船前進的距離為

$$AB.$$

由三角形 PAB 的三角形不等式知道

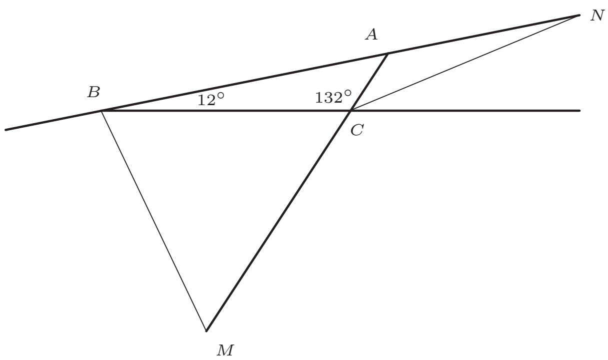
$$|PA - PB| < AB,$$

即滑輪捲動的繩子長度 $<$ 輪船前進的距離。

1.2 平面幾何證明⋯最好的邏輯推理訓練

讓頭腦的推論合乎邏輯最簡單的訓練或檢驗方式就是從事平面幾何證明：

例題 **1** 如下圖所示：



設 BM 與 CN 是三角形 ABC 的外角分角線。證明 $BM = CN$。

〔證〕因為 $\angle CBM = \frac{180^\circ - 12^\circ}{2} = 84^\circ$，$\angle BCM = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$，所以

$$\angle BMC = 180^\circ - 84^\circ - 48^\circ = 48^\circ,$$

因此三角形 BMC 是等腰三角形，即 $BM = BC$。

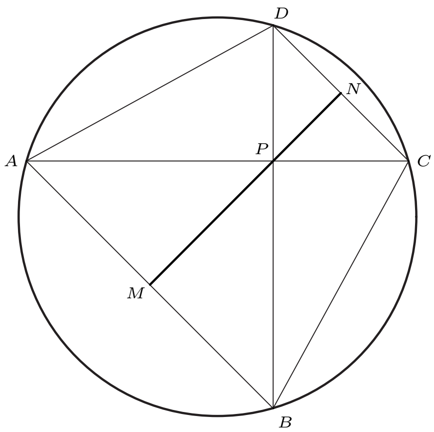
因為 $\angle ACN = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ$， $\angle BAC = 180^\circ - 132^\circ - 12^\circ = 36^\circ$，所以

$$\angle BNC = 36^\circ - 24^\circ = 12^\circ,$$

因此三角形 BNC 是等腰三角形，即 $BC = CN$。

綜合得到 $BM = BC = CN$。 $\boxtimes$

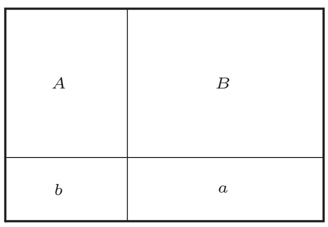
練習 **1** 如圖所示：



圓內接四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC 與 BD 互相垂直，且相交於 P 點。若 N 在 CD 上，MN 通過 P 點，且與 AB 垂直，則證明 $CN = DN$。

1.3 矩形分割

例題 **2** 如下圖



利用鉛直線與水平線可將矩形分割成面積依序為 A, a, B, b 的四個小矩形。該如何畫鉛直線與水平線，才能使其滿足下列條件。

① 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$a + A = b + B.$$

② 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}.$$

③ 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$A - a = B - b.$$

④ 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$aA = bB.$$

〔證〕令大矩形的長被鉛直線分成長度為 p 與 q 的兩個線段；寬被水平線分成長度為 r 與 s 的兩個線段。此時

$$A = pr, a = qs, B = qr, b = ps.$$

① 由題意知

$$\begin{aligned} qs + pr = ps + qr &\Rightarrow q(s - r) = p(s - r) \\ &\Rightarrow (p - q)(s - r) = 0 \\ &\Rightarrow p - q = 0 \quad \text{或} \ \ s - r = 0 \\ &\Rightarrow p = q \quad \text{或} \ \ s = r. \end{aligned}$$

故當鉛直線或水平線平分大矩形面積時，等式

$$a + A = b + B$$

成立。

② 由題意知

$$\begin{aligned} \frac{pr}{qs} = \frac{qr}{ps} &\Rightarrow q^2 = p^2 \\ &\Rightarrow (q + p)(q - p) = 0 \\ &\Rightarrow q = p. \end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

成立。

③ 由題意知

$$\begin{aligned} pr - qs = qr - ps &\Rightarrow p(s+r) = q(s+r) \\ &\Rightarrow p = q. \end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$A - a = B - b$$

成立。

④ 由題意知

$$qs \cdot pr = ps \cdot qr \Rightarrow 1 = 1.$$

故無論鉛直線或水平線為何，等式

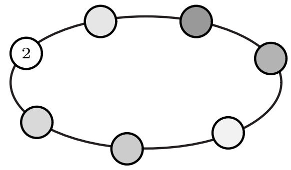
$$aA = bB$$

恆成立。

⊠

1.4 奧修的念珠

例題 **3** 奧修的念珠是由七顆精選的寶石串起來的，其中標示 2 的那顆寶石的重量為 2 克拉。



為了某種目的，這串念珠每顆寶石的重量必須是其左、右兩顆相鄰寶石重量的幾何平均數。試求這串念珠其餘六顆寶石的重量。

〔證〕令七顆寶石重量最輕者為 w 克拉，而在最輕者左、右兩顆相鄰寶石重量分別為 a 與 b 克拉。由此假設知道

$$w \le a, w \le b, w = \sqrt{ab}.$$

① 如果 $w < a$，則 $w^2 < ab$，即 $w < \sqrt{ab}$，與 $w = \sqrt{ab}$ 矛盾。
② 如果 $w < b$，則 $w^2 < ab$，即 $w < \sqrt{ab}$，與 $w = \sqrt{ab}$ 矛盾。
因此 $w = a, w = b$，即最輕者左、右兩顆相鄰寶石重量與最輕者同重。

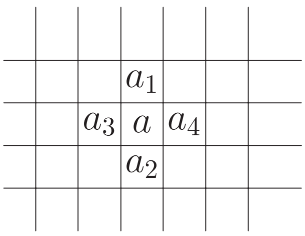
同法可得，所有的寶石都是相同的重量。故每顆寶石的重量都是 2 克拉。 ☒

練習 **2** 若奧修的念珠是符合“每顆寶石的重量必須是其左、右兩顆相鄰寶石重量的算術平均數”這個條件，則求這串念珠其餘六顆寶石的重量。

有了這兩道問題的證明經驗之後，接下來請你解決台大推甄的一道問題：

練習 **3** 在無窮的平面網格上（由無窮多水平線與垂直線所形成），每一格之內放置一個自然數（可重覆），使其每一格的數都等於其相鄰上下左右四格的平均值，即

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$



張三說：要完成這樣的配置，必須每一格放置相同的正整數。請問：張三的說法正確嗎？請說出你的論證。

你知道恆等式

$$4 = n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

有多美嗎？當你可以用它來解決下一道例題的時候，你就可以領悟它的漂亮！

例題 4 如下表所列

$$\begin{aligned}1 =& 1^2;\\ 2 =& -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2;\\ 3 =& -1^2 + 2^2;\\ 4 =& -1^2 - 2^2 + 3^2;\\ 5 =& 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2,\end{aligned}$$

正整數 $1, 2, 3, 4, 5$ 都可以寫成從 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$ 等依序開始的若干個平方和（可以放正負符號修正）。

是否每個正整數都可以這樣做。可以的話，證明之；不能的話，舉一個反例。

〔證〕利用恆等式

$$4 = n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

可以證明：任意正整數都可以。例如

$$\begin{aligned}6 &= 2 + 4\\ &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + \left(5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2\right)\\ &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2;\end{aligned}$$

依樣畫葫蘆，可知

$$\begin{aligned}9 &= 5 + 4\\ &= 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + \left(6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2\right)\\ &= 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2.\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}9 &= 1+4+4\\&= 1^2+\left(2^2-3^2-4^2+5^2\right)+\left(6^2-7^2-8^2+9^2\right)\\&= 1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2.\end{aligned}$$

仿照此方法及 $1,2,3,4$ 可以表成連續平方數的正負和，知道任何正整數都可以表成連續平方數的正負和。 ⊠

1.6 直接證法是畫家，反證法則是雕刻師

米開朗基羅正在做一座耶穌的塑像，有人跟他說“你的創造是偉大的”。他說“我什麼也沒有做。耶穌藏在這塊大理石裏面，我只是幫助他被釋放出來。他已經在那兒了，只是有超過了需要的大理石。有無關緊要的⋯我把那無關緊要的鑿去。我只是發現了他，我沒有創造他”。

畫家直接畫出人像或物體，就像直接推論出要證明的結果一樣，但是雕刻師傅採取相反的策略，他只是把不必要的大理石鑿開而已，就像去除所有錯誤的選項，正確的推論就呼之欲出了。因此直接證法由畫家來擔綱，而反證法就委託雕刻師傅演出了。

例題 **5** 證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

〔證〕在這裡提供兩種證明方法，它們都是反證法。假設 $\sqrt{2}$ 是有理數（不是無理數）。每個有理數都有很多種不同的表示法，例如

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\cdots,$$

但是分母最小的表示法只有一個，而且分母最小的表示法會使分子與分母互質。故有理數 $\sqrt{2}$ 有下列兩種不同的說法（表示法）：

〔證 1〕令

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p},$$

其中 p,q 是互質的正整數。將兩邊平方得到

$$2=\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow 2p^2=q^2.$$

由整數分解性質得 $2|q$，令 $q=2r$，代入得到

$$2p^2=(2r)^2 \Rightarrow 2r^2=p^2.$$

同法可得 $2|p$。

因此 2 是 p 與 q 的公因數，此與 p,q 互質矛盾。故"假設 $\sqrt{2}$ 是有理數"是錯誤的，即 $\sqrt{2}$ 是無理數。

〔證 2〕令

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p},$$

其中 p,q 為正整數，且 $\frac{q}{p}$ 是分母 p 值最小的表示法。因為 $1<\sqrt{2}<2$，所以 $1<\frac{q}{p}<2$，即

$$p<q<2p.$$

由

$$\begin{aligned}\sqrt{2}=\frac{q}{p} &\Rightarrow 2p^2=q^2\\ &\Rightarrow 2(q-p)^2=(q-2p)^2\\ &\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{2p-q}{q-p}\ (\text{因為 } p<q<2p).\end{aligned}$$

在表示法 $\sqrt{2}=\frac{2p-q}{q-p}$ 中，分母 $q-p$ 滿足

$$q-p<p\ (\text{因為 } q<2p).$$

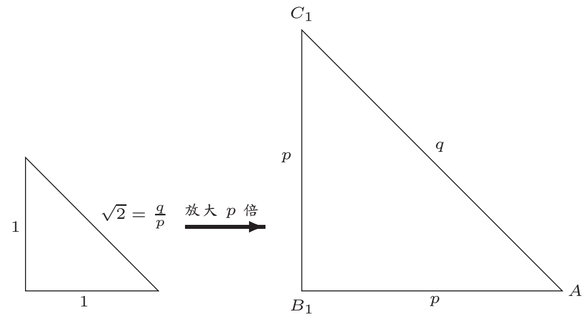
這與 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ 是表示法中分母 p 值最小的矛盾。故"假設 $\sqrt{2}$ 是有理數"是錯誤的，即 $\sqrt{2}$ 是無理數。 ⊠

練習 **4** 如果直接證法由畫家來擔綱，反證法委託雕刻師傅演出，那麼數學歸納法請誰客串呢？

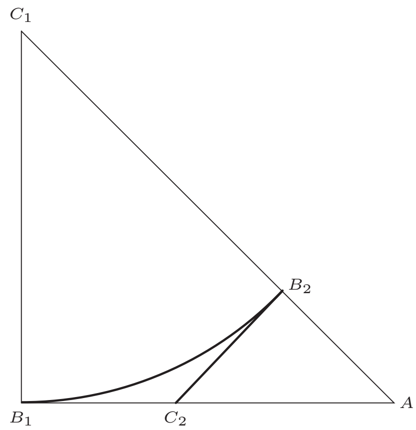
1.7 $\sqrt{2}$ 不是分數的再次證明⋯費馬無窮遞降法

數學問題的證明方法除了「直接證法」，「反證法」與「數學歸納法」外，還有一種叫做「費馬無窮遞降法」的證明方法。我們就以"$\sqrt{2}$ 不是分數"這道數學問題為藍本，讓你體會何謂「費

馬無窮遞降法」。首先，還是假設 $\sqrt{2}$ 是分數，並令 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$，此時可以將邊長 $1,1,\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ 的等腰直角三角形放大 p 倍，得到一個邊長都是正整數 p,p,q 的等腰直角三角形 AB_1C_1（如下圖所示）：



現在以 C_1 為圓心，C_1B_1 為半徑，畫一圓交線段 C_1A 於 B_2；過 B_2 作該圓切線與 AB_1 相交於 C_2。



三角形 AB_2C_2 有如下的性質：

① 因為 $\angle A=45^\circ$，C_2B_2 與 AC_1 垂直，所以三角形 AB_2C_2 是等腰直角三角形，$\angle AB_2C_2$ 是直角，且 $\angle B_2AC_2=\angle B_2C_2A=45^\circ$。

② 因為 $B_2A=C_1A-C_1B_2=q-p$，$B_2A=B_2C_2=B_1C_2$，所以 $B_1C_2=B_2C_2=B_2A=q-p$ 都是正整數。

③ 因為 $AC_2=AB_1-B_1C_2=p-(q-p)=2p-q$，所以 AC_2 也是正整數。

綜合得到：三角形 AB_2C_2 也是一個邊長都是正整數的等腰直角三角形，但是顯然它的斜邊 AC_2 比三角形 AB_1C_1 的斜邊 AC_1 要短。同樣的方法，可以得到邊長都是正整數的等腰直角三角形

$$AB_3C_3,\quad AB_4C_4,\quad AB_5C_5, \cdots,$$

而且斜邊

$$AC_1 > AC_2 > AC_3 > AC_4 > \cdots.$$

因為斜邊都是正整數，所以不可能一直小下去，因此產生了矛盾。故原先假設“$\sqrt{2}$ 是分數”是錯誤的，$\sqrt{2}$ 不可能是分數，應該是無理數。 $\boxtimes$

如果你領悟了「費馬無窮遞降法」的奧妙，將發現「費馬無窮遞降法」與「數學歸納法」是走相反的方向，數學歸納法從最小的正整數 1 檢驗起，逐步往大的正整數推，最後證明所有的正整數都成立；而費馬無窮遞降法卻從某個大的正整數做起，逐步往小的正整數導，最後得到矛盾。因此，「費馬無窮遞降法」與「數學歸納法」實質上是相同東西的兩面。

練習 5 試著模仿上述費馬無窮遞降法，證明 $\sqrt{5}$ 不是分數。

練習 6 證明以 $36°, 72°, 72°$ 為內角的等腰三角形之邊長不可能都是正整數。

1.8 讓頭腦處在真實而正確的記憶中

記憶就是頭腦對過去經驗的喚起，它也是頭腦的五種功能之一。對過去事情採取真實而正確的記憶是很重要的，不要試圖去美化或者醜化過去所做事情的記憶。

舉例來說，學生經常在考完試之後，悔恨的說“為什麼沒想到這個，沒想到那個”之類的話，他在意的是分數的沒辦法多一點，而不是對剛剛考試過程的正確記憶。事實上，是因為他處在錯誤的知識中心，才導致沒想到這個，沒想到那個。他必須對這件事情做真實而正確的記憶，才能在下一次避免犯同樣的錯誤。如果他試圖以安慰自己的方式，美化自己的記憶（如將它解釋成

不小心，一時糊塗或粗心大意），甚至把別人做對的事情醜化成別人的僥倖，那麼他將一再地犯同樣的這個錯誤。

再舉一例，在數學考試中，有關選擇題或填充題的部分，有時因為出題不夠慎重的關係，導致可以用特例來解題。很多學生養成靠特例解題取得分數，反而忽略了真正的解法。每次考試後，在學生心中，只有特例解題，美化分數的記憶，卻對不知如何正確解題的記憶忽略，甚至也沒在考試後，去追求真正的作法。這只會導致同樣的事情一再發生，數學能力反而提升不易。

美化自己與醜化別人是頭腦最容易犯的一種錯誤，那是一種錯誤的記憶。正確的記憶應該是對過去的事情不做任何判斷，且真實正確的記下來就可以了。這看似簡單，卻是很難做到，因為頭腦總是喜歡將過去自己做不好的事美化，將別人做得不錯的事給予醜化。