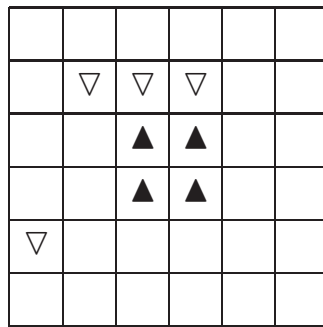


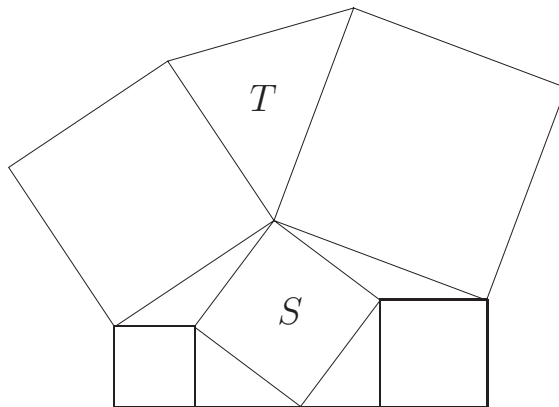
台北市九十一年度資賦優異教育方案數學競賽
隊際賽試題

- 壹、“蹴鞠”是唐宋時代一種類似今日足球的運動，在宮廷裡很是盛行（宋徽宗是當時的蹴鞠高手）。當時規定，踢進一球得 a 分；罰進一球得 b 分（那時 $a > b$ ）。從出土的成績紀錄表上發現：2 分及 13 分是從來沒有出現過的，而且 14 分到 100 分都在紀錄表上發現過。你是否可以據此推得：當時的蹴鞠運動，踢進一球及罰進一球的分數是多少呢？（20 分）
- 貳、老農有一大塊方形土地，四個兒子。方形土地上有四座丘陵（以符號 ▲ 表示）及四座水塘（以符號 ▽ 表示）。今老農想將土地平均分給四個兒子，並希望每個兒子的土地各有一座丘陵、一個水塘而且土地形狀是一樣的。你能幫老農分田嗎？



（20 分）

- 參、古代日本常將數學問題刻在神廟的樑柱上，下圖就是一個例子。它是一個由五塊正方形所搭成的廟宇平面圖。 T 與 S 分別代表所在三角形與正方形的面積。試導出 T 與 S 的關係。



(20 分)

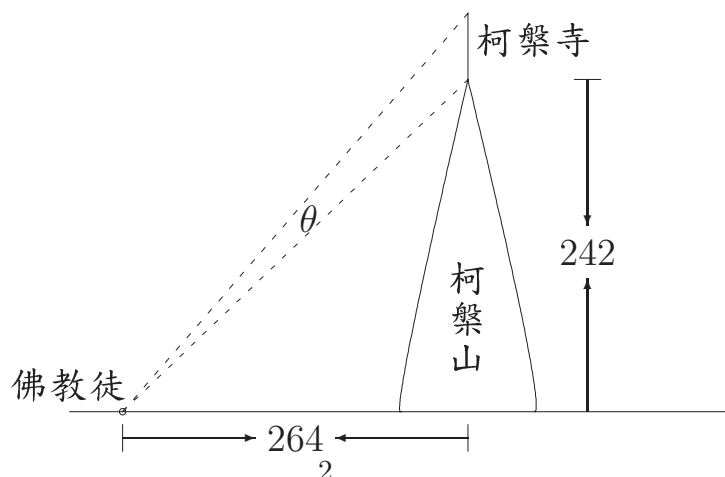
- 肆、設甲、乙、丙三人參加一項考試，其中是非題共有七題，每道題答對得 1 分，不答得 0 分，答錯倒扣 1 分。下表記錄著每個人的答題情形（空白代表此人該題未答），已知甲、乙、丙三人在是非題部分都得到兩分。而且標準答案中，X 的題目比○的題目還多。試由此推知各題的正確答案並加以說明。

題目 \ 考生	甲	乙	丙
第一題	○		X
第二題		X	○
第三題	X	X	X
第四題	○	X	○
第五題	X	○	○
第六題	X	○	
第七題	○	○	X
得分	2	2	2

(20 分)

- 伍、古代尼泊爾的柯槃山上建有一座柯槃寺。虔誠的佛教徒採取仆倒前進的方式，向柯槃寺朝聖。有經驗的佛教徒都會在離柯槃山前 264 公尺處，抬頭仰望柯槃寺，並許下願望，因為此時看見整個柯槃寺的視角 θ 最大。

現在知道柯槃山的高度為 242 公尺。試問：昔日的柯槃寺高度是多少。



(20 分)

陸、在賭城有一種有趣的賭博遊戲，遊戲規則如下：在不透明的箱子中放入 10 顆黑球和 5 顆白球，每次從箱子中取出兩顆球。

- (1) 如果抽到兩顆黑球，一顆留在箱外，一顆放回箱子。
- (2) 如果抽到一黑一白，黑球留在箱外，白球放回箱子。
- (3) 如果抽到兩顆白球，兩顆白球都留在箱外，並在箱內補進一顆黑球。

在抽取 14 次之後，箱中只剩下一顆球。賭徒必須在遊戲進行之前，下注最後會剩下哪種顏色的球。如果你是賭徒你會如何下注？

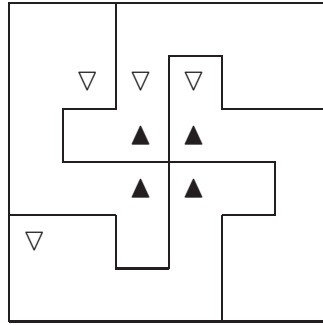
如果箱中放入的是 10 顆黑球和 6 顆白球，你又會如何下注？

(20 分)

參考解答

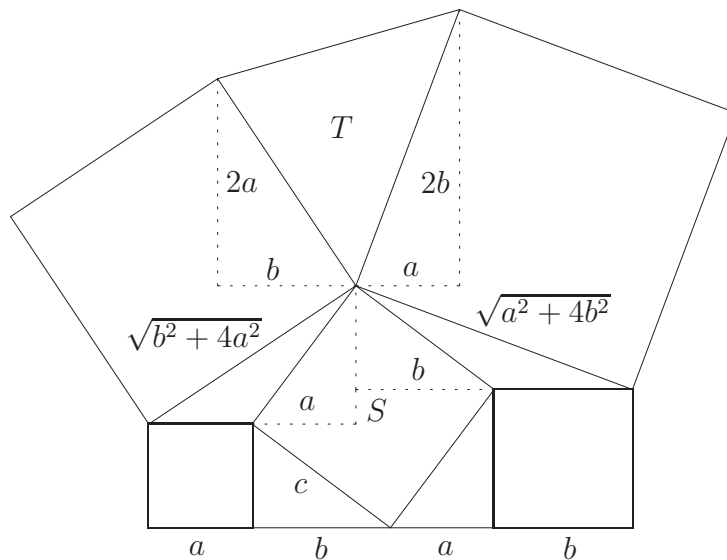
壹、因為 2 分沒出現，所以 $2 < b$ 。因為 $2 < b$ ，所以 $a+1, a+2$ 不可能同時是 b 的倍數，即 $a+1, a+2$ 至少有一個數字沒出現。因此 $a+1 \leq 13$ ，即 $a \leq 12$ 。因為 a, b 必須是互質的整數，逐一檢查結果僅 $(a, b) = (8, 3)$ 合乎所求。

貳、如下圖所示：



參、巧添虛線的補助線，並得到如符號所表的線段長度。那麼我們得到

$$\begin{aligned}
 T &= \text{梯形面積} - \text{左三角形面積} - \text{右三角形面積} \\
 &= \frac{(2a+2b)(a+b)}{2} - \frac{2a \cdot b}{2} - \frac{a \cdot 2b}{2} \\
 &= a^2 + b^2 \\
 &= c^2 \\
 &= S.
 \end{aligned}$$



肆、考慮下表所增列的最後一行（甲、乙、丙三人在該題的總得分）：

題目 \ 考生	甲	乙	丙	○ 或 X
第一題	○		X	0
第二題		X	○	0
第三題	X	X	X	-3 或 +3
第四題	○	X	○	+1 或 -1
第五題	X	○	○	+1 或 -1
第六題	X	○		0
第七題	○	○	X	+1 或 -1
得分	2	2	2	6

因為最後一行的各題總分之和為 6 分，所以

第三題是“X”，三人共得 3 分；

第四題是“○”，三人共得 1 分；

第五題是“○”，三人共得 1 分；

第七題是“○”，三人共得 1 分。

現在考慮第一、二及六題。因為甲、乙、丙三人在是非題部分都得到兩分，且各有一題空白，所以他們都答對 4 題，答錯 2 題。因為丙在第三、四、五、七等四題共得 2 分，所以第一、二題，他必需是答對一題，答錯一題。因此第一、二題的答案不是○○就是 XX。若是○○，則○的題目超過半數，與題意不合。因此

第一題是“X”，三人共得 0 分；

第二題是“X”，三人共得 0 分。

再考慮甲的作答情形可得到

第一題是“X”，三人共得 0 分；

第二題是“X”，三人共得 0 分；

第三題是“X”，三人共得 3 分；

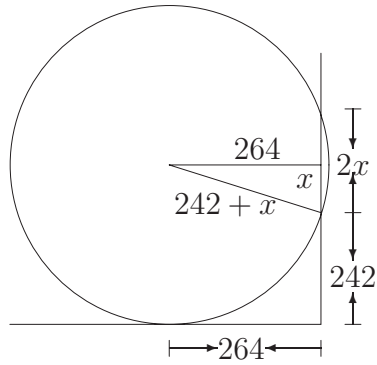
第四題是“○”，三人共得 1 分；

第五題是“○”，三人共得 1 分；

第六題是“X”，三人共得 0 分；

第七題是“○”，三人共得 1 分。

- 伍、設柯槃寺的高度為 $2x$ 公尺。由下圖觀察得知：當過佛教徒的眼睛、柯槃寺底部、柯槃寺頂點三點的圓與地面的水平線相切時，視角會最大（若不相切，則此圓的半徑會比相切圓的半徑大，所以柯槃寺的視角比較小）。



由上圖的直角三角形得到

$$(x + 242)^2 = x^2 + 264^2 \Rightarrow x = 23.$$

因此柯槃寺的高度為 46 公尺。

陸、設 w_n 代表抽取 n 次之後，箱子中剩下的白球總數。顯然， $w_0 = 5$ 。由下表得知：

$$w_n \equiv w_0 \equiv 5 \equiv 1 \pmod{2}.$$

由此式子得知： w_n 恆為奇數。因此最後剩下的球必為白球。

取出結果	黑球總數	白球總數
兩顆黑球	-1	不變
一黑一白	-1	不變
兩顆白球	+1	-2

在 10 顆黑球和 6 顆白球的情形下：考慮抽取 14 次之後，所剩兩顆球的分佈情形。由 w_n 的關係知道：剩一黑一白是不可能的，其餘兩種都會剩下黑球。因此最後剩下的球必為黑球。