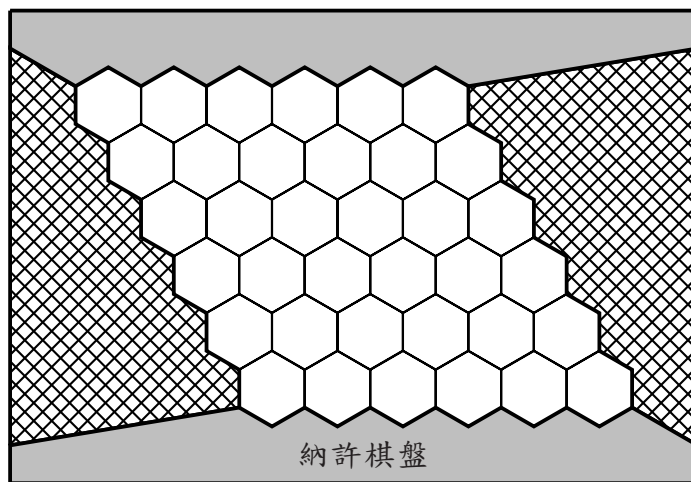


## 1 納許棋的奧秘

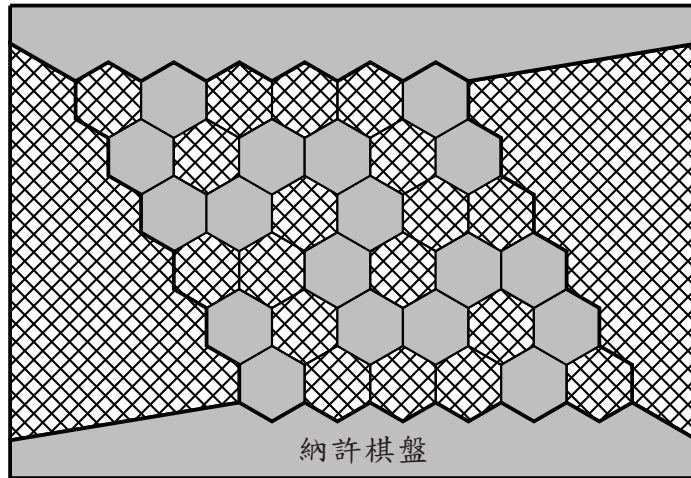
看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋盤，據說是他在普林斯頓高等研究院的廁所發現的。因為廁所的磁磚是正六邊形鋪成的，所以納許棋是跟正六邊形有關的遊戲。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由  $6 \times 6 = 36$  塊正六邊形磁磚鋪成）：



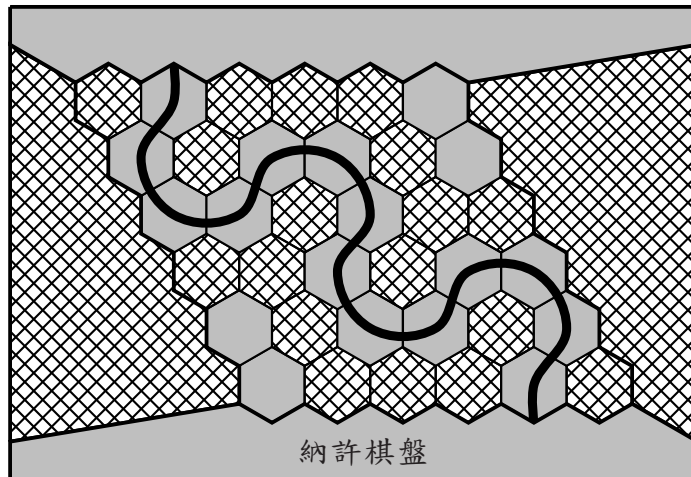
「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先

生所有)：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那們另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是這裡所要討論的問題：

---

題目：(納許棋) 無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利。

---

---

兩人玩的遊戲有許多，如象棋，五子棋，圍棋，西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的是如此嗎？讓我們來欣賞灰姑娘的錦囊妙計：

---

### 灰姑娘的勞作解法

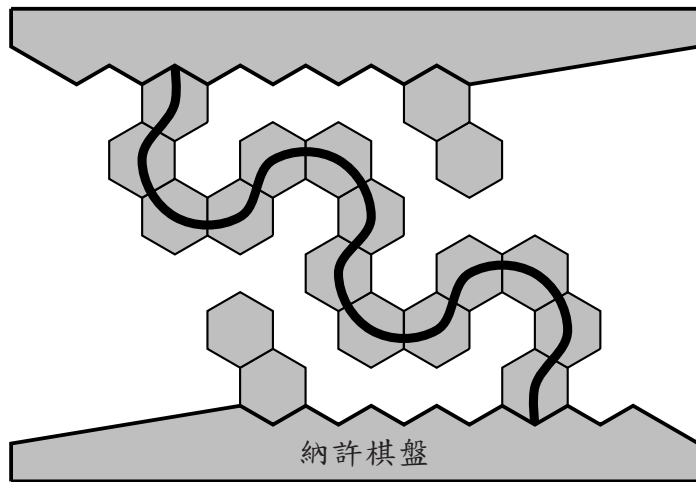
---

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根據考古其歷史可追溯到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？

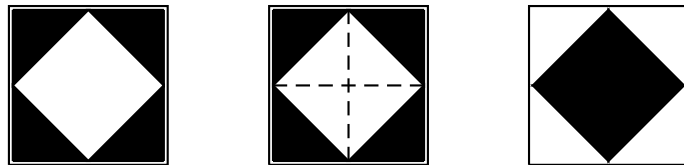
如果網先生的兩塊網狀領土可以透過他佔領的正六邊形土地銜接，那麼網先生就是獲勝的人。否則（網先生無法銜接他的兩塊網狀領土），需說明灰姑娘可以串連她的灰色土地。證明方法是這樣的：

- ① 利用剪刀將網先生的左、右兩塊網狀領土剪掉。
- ② 再利用剪刀將網先生佔領的十八塊正六邊形網形土地也剪掉。
- ③ 此時棋盤剩下灰姑娘的上、下兩塊灰色土地及她所佔領的十八塊正六邊形灰色土地。
- ④ 將右手抓住灰姑娘上方灰色土地，左手捏著灰姑娘下方的灰色領土。看看是否可以將它們拉開。
- ⑤ 若不能拉開，則表示灰姑娘的上、下兩塊灰色土地被她佔領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣。
- ⑥ 若可以拉開，則沿著灰姑娘的上方灰色土地的下沿，可以找到貫穿網先生左、右兩塊網狀領土的路徑，這樣代表網先生獲勝。



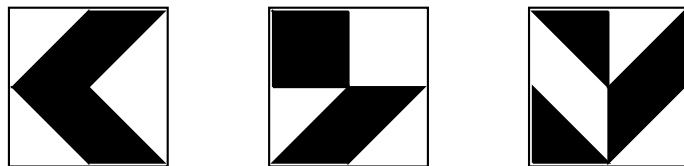
到此，我們已經知道納許棋是一種不會合棋的遊戲。接下來的問題就是「先玩者與後玩者何者有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。

**練習 1** 如下第一圖所示，正方形中心畫一個鑽石菱形。現在將正方形平分成四個小正方形（第二圖），將右上與左下交換，右下與左上交換，得到第三圖。



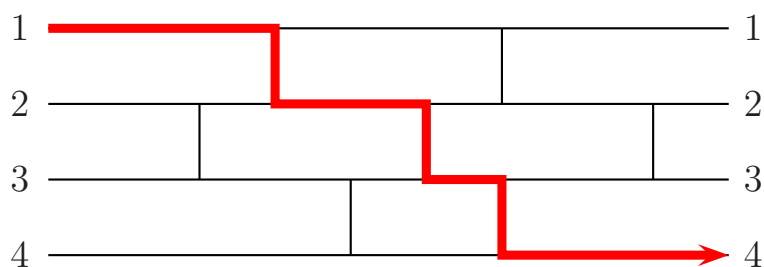
▲ 鑽石遊戲

像這樣，將四個小正方形的位置互換所產生的圖形，稱為原圖的置換圖。試問：下列三個圖，哪幾個是置換圖。



香港有個地產集團設立「恆隆數學獎」（由丘成桐院士主持），用來獎勵中學生在數學科展上的貢獻。首屆（2004年）銅牌獎是在討論「畫鬼腳」這道中國的傳統遊戲。如下圖所示，在四

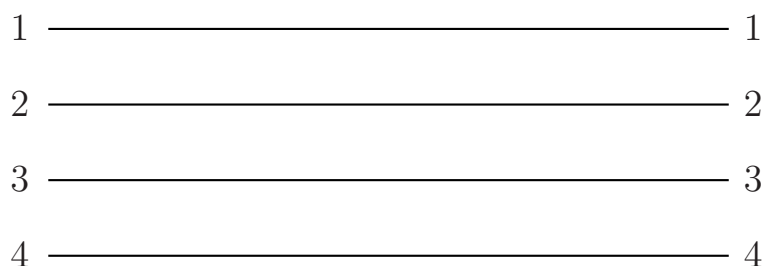
條平行線間畫了七條鬼腳後，左邊的數字 1 往右前進，碰到鬼腳就轉彎，最後抵達數字 4 的位置。



〈鬼腳圖〉

同樣的方法可以發現，數字 2 會走到 2 的位置，數字 3 會跑到 3 的位置，而數字 4 會到達 1 的位置。為了方便起見，就用函數「 $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$ 」來描述這鬼腳圖的結果。看似簡單的鬼腳圖，其實裡面隱藏著許多深邃的數學知識。就讓我們來一道鬼腳大餐吧！

**練習 2** 甲、乙兩人輪流在下圖中畫鬼腳，甲先畫一條鬼腳，接著換乙畫，…，依此次序輪流畫。



〈鬼腳圖〉

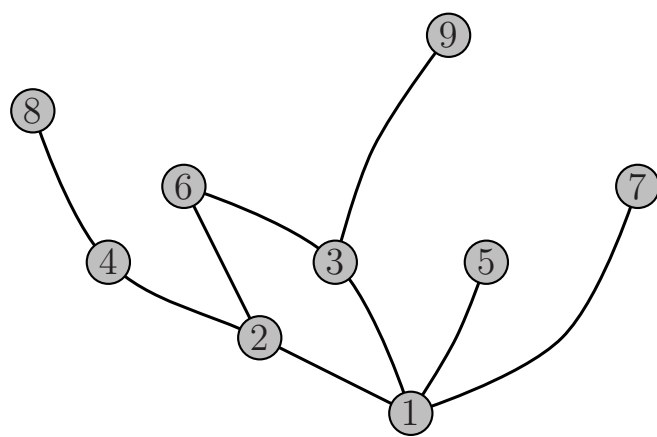
至於鬼腳畫在何處，甲、乙兩人可以自由決定。當有人畫完鬼腳之後，所對應的函數為「 $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$ 」時，此人得勝，比賽停止。

問何者可以得勝。

**練習 3 (拔“數”遊戲)** 如下圖所示，在種植編號分別為

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

的九棵大樹裡進行拔樹遊戲。甲、乙兩人輪流拔樹，每次拔一棵樹，但是當編號 6 的樹被拔掉時，編號 1, 2, 3 (6 的因數) 的樹也跟著除掉，依此規律拔樹。最後把樹拔光的人獲勝。



〈拔數圖〉

問何者可以得勝。

**練習 4** 這是一道“讀心數”的遊戲，規則是這樣的：玩者先想任意兩個數（不告訴任何人這兩個數），叫做  $a_1$  與  $a_2$ ，接下來將這兩個數相加，令  $a_3 = a_1 + a_2$ ，再將  $a_2$  與  $a_3$  相加，得  $a_4 = a_2 + a_3$ ，如此繼續下去，得到數列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_7, \dots, a_{10}.$$

你只需告訴我  $a_7$  的值，我就知道

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$$

的值。個中道理為何呢？