

1 後山能者不惶多讓

每年冬天，來趟花蓮之旅，幾乎成為例行公事。住英雄館，或宿美人館，便宜又方便，而且散步就可以到達液香扁食店，吃碗扁食是那晚必做的晚課。白天散步在花蓮港邊的腳踏車步道，想著悠游在海裡的翻車魚，生長在山邊的芋頭，真讓人食指大動。回家時可別忘了帶點曾記麻糬或百年老店惠比須的花蓮薯。有位邱姓大學同學住花蓮真好，每次都帶給我不同的體驗。記得有一次，晚上開車帶我到花蓮的山上品茶看花蓮夜景，讓我留下很深刻的印象；更有一次，帶我到遠來大飯店眺望整個花蓮地區燈火通明的景色。當然，到光復糖廠吃冰或安通洗溫泉也是不可免的啦。

每次到花蓮出差，心情特別愉快，除了當作散心外，參與數學競賽的宜、花、東考生也不是很多，無論是口試或閱卷都輕鬆。記得有一次，一道題目是這樣出的：

設實數 a_1, a_2, b_1, b_2 滿足 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 及 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 。試證明：不等式 $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ 成立。

基本上，這並不是一道難題，學生作法五花八門都有，不過都離不開把 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 想成數線上的五個點，或者把 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 看成兩個矩形的面積關係，這兩種容易聯想到的出發點。閱卷時發現一位同學利用分數的想法來處理，讓我有點意外。或許是學數論的我對“數”特別敏感，在口試時，問得更詳細一點，就得知這位男同學的整個想法，現在把他的奇想寫下，供讀者參考：

男同學的瞥見

將 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2 > 0$ 想成分數大小關係，得

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{b_2}{a_2}.$$

將兩邊同時減 1，得

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} - 1 &\geq \frac{b_2}{a_2} - 1 \Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_1} \geq \frac{b_2 - a_2}{a_2} \\ &\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq \frac{b_1}{a_2}. \end{aligned}$$

利用 $b_1 \geq a_2 > 0$ (即 $\frac{b_1}{a_2} \geq 1$)，得

$$\frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq 1.$$

由 $a_1 - b_1 \geq 0, b_2 - a_2 \geq 0$ 得

$$a_1 - b_1 \geq b_2 - a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2,$$

得證。

練習 1 如果要求利用矩形面積的想法來證明這不等式，你有辦法完成嗎？