

數學新天地問題集（第三集）

- 3-1. 有 A, B, C 三位先生及 X, Y, Z 三位女士，他們是三對夫妻，約好下班後去一位友人家聚會。六個人分別在路上買了饅頭，買饅頭的規則竟然都是「一個饅頭多少元就買幾個。」

到了友人家之後發現， A 比 X 多買 23 個饅頭， B 比 Y 多買 11 個饅頭，而且每位先生剛好都比他的太太多花 63 元。
問：誰與誰是夫妻。

- 3-2. 一監獄的囚牢剛好排成一列，囚牢編號從 $1, 2, 3, \dots$ 下去。起初所有囚牢的門都是關著的，一獄卒依照如下的規矩開關囚牢：「先將所有囚牢的門打開，接著將偶數號囚牢關起來，然後號碼為 3 的倍數的囚牢，如果是關著的就打開，開著的就關閉，接著號碼為 4 的倍數的囚牢，如果是關著的就打開，開著的就關閉， \dots ，依此類推」。試問哪些號的囚牢最後仍是開著的。

- 3-3. 在一輛火車上有三位結伴出遊的女乘客，她們在車上認識火車上工作的司機，伙房及導遊等三位男工作人員。巧的是，三位小姐的姓氏與三位男工作人員的姓氏剛好相同。

下段文字是他們在車上對話的整理：王小姐住台北，導遊住台中。陳小姐月收入有 4 萬元，導遊的月收入剛好是離他家最近的小姐的三分之一。導遊與住高雄的小姐同姓。李先生與伙房打過桌球。

問：司機，伙房及導遊貴姓。【註：台北至台中與高雄至台中的距離當做一樣，月收入為整數元】

- 3-4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & (n \geq 1). \end{cases}$$

證明： $\langle a_n \rangle$ 是等比數列。

- 3-5. 邊長為 a, b, c 的三角形之面積公式為

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

這裡的 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，這就是有名的海龍公式。當三邊邊長及面積均為正整數時，就稱這三角形為『海龍三角形』。

設 a, b, c 是一個直角三角形的三邊邊長 ($c^2 = a^2 + b^2$)； p, q, r 也是 ($r^2 = p^2 + q^2$)。如果 a, b, c, p, q, r 都是整數，那麼說明 $cq, br, aq + bp$ 可以構成三角形的三邊邊長，而且這個三角形是海龍三角形。