

## 數學新天地問題集（第九集）

9-1. 設  $a, b$  為實數，證明四次方程式

$$5x^4 + ax^3 + bx - 1 = 0$$

有一實數根  $\alpha$  滿足  $-1 \leq \alpha \leq 1$ 。

順便診斷一下侃庚同學的證明過程是否有誤：機靈的侃庚同學假設四次方程式的四個根分別為  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ，利用根與係數的關係得到

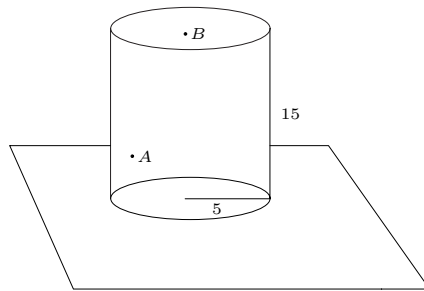
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{1}{5}.$$

因為  $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4| = |-\frac{1}{5}| < 1$ ，所以

$$|\alpha_1| > 1, |\alpha_2| > 1, |\alpha_3| > 1, |\alpha_4| > 1$$

是不可能同時成立的。故必有一根  $\alpha_1$  滿足  $-1 \leq \alpha_1 \leq 1$ 。

9-2. 如下圖所示，玻璃杯之形狀為圓柱形，半徑 5 公分，高為 15 公分，放在桌上。一隻螞蟻從玻璃杯外側的  $A$  點爬到杯口，再進入玻璃杯內側的  $B$  點喝水。假設  $A, B$  兩點的距離為 13 公分， $A$  點離杯底距離是 1 公分， $B$  點離杯底 13 公分。如果忽略不計玻璃杯的厚度，那麼螞蟻從  $A$  點到  $B$  點之最短路徑是多少公分？



9-3. 考古學家挖到一張當時某家庭的煤氣支付表，表上列舉此家庭在當年一月、二月與三月份的煤氣用量及應繳的煤氣費用：

月份	煤氣用量	煤氣費用
一月份	4 米 <sup>3</sup>	4 元
二月份	25 米 <sup>3</sup>	14 元
三月份	35 米 <sup>3</sup>	19 元

已知當時的煤氣收費標準為：

$$\text{煤氣費} = \text{基本費} + \text{超額費} + \text{保險費}。$$

如果每月的煤氣用量未超過基本用量，只需付基本費 3 元和每戶每月定額的保險費；若用氣量超過基本用量，超過部分每米<sup>3</sup>加收固定的金額。

已知當時的保險費不超過 5 元，請根據這些資訊，求出當年的「煤氣基本用量」、「保險費」及「超過部分每米<sup>3</sup>加收的金額」分別是多少？

- 9-4. 有一種娛樂用的號碼鎖，它有三個密碼，每個密碼都是由 1, 2, 3 這三個數字所構成。開鎖者只要轉對其中的兩（含）個密碼以上，鎖就會自動開啟，例如當密碼為 (1, 2, 3) 時，轉 (1, 3, 2) 是不會開的（只轉對 1 個密碼），但是轉 (1, 3, 3) 就會打開（轉對了第 1, 3 位置的密碼）。問：對付這種娛樂鎖，你至少需嘗試幾次才保證一定能打開。
- 9-5. 你和你的好朋友經常打桌球，根據過去的經驗得知：在每一局中，你獲勝的機率為  $p$  ( $\frac{1}{2} < p < 1$ )。今天你的好朋友想跟你來一場比賽，至於是採三戰兩勝，五戰三勝或者是七戰四勝的比賽制度，由你決定。問：你應採取那一種比賽制度才有較高的勝算。