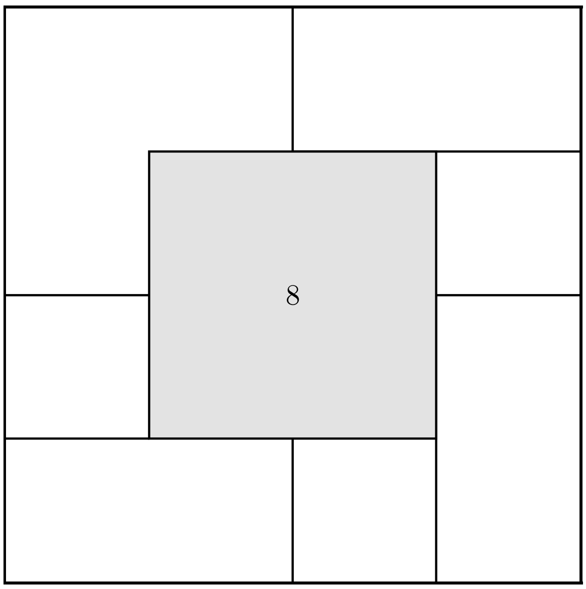
高中數學教室

談三角形面積公式

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 23, 2004



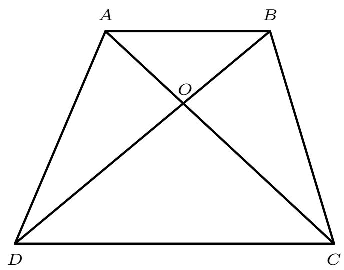
八個全等的正方形一個放在另一個的上邊。如果數字 8 的正方形是最後放的，試確定其它 7 個正方形安放的順序，使得最終結果看上去像圖上那樣排列。

目 錄

1 談三角形的面積公式⋯經驗與智慧的傳承

小學時就學會三角形的面積公式，有了這個公式，正方形，矩形，平行四邊形，梯形，菱形等的面積就可以順利推導得到。甚至連多邊形的面積也常常將它分割成數個三角形求面積的，因此學會計算三角形的面積是一件相當重要的事情，在這裡我們介紹三角形面積的各種不同求法，由於人們經驗的累積與智慧的傳承，各位在讀完之後，可能會驚訝的發現：原來三角形的面積有這麼多樣的算法！

1.1 $\frac{\text{底}\times\text{高}}{2}$⋯從基本定義出發



右圖是一個梯形 $ABCD$（邊 AB 與邊 CD 平行）。因為三角形 ADC 與三角形 BDC 的高度一樣，底邊長度也一樣，所以根據三角形的面積公式，它們的面積也相同，即

$$\triangle ADC = \triangle BDC,$$

也就是說

$$\triangle ADO + \triangle ODC = \triangle BCO + \triangle ODC.$$

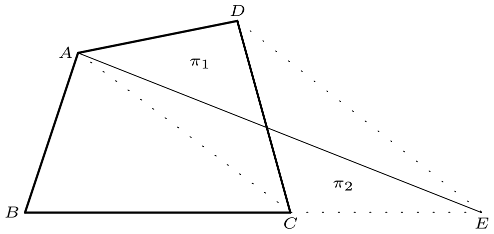
將兩邊的 $\triangle ODC$ 消去，得到大家耳熟能詳的梯形性質：

$$\triangle ADO = \triangle BCO.$$

單從三角形的面積公式出發，就能獲得如此美妙的公式，你不覺得很神奇嗎？

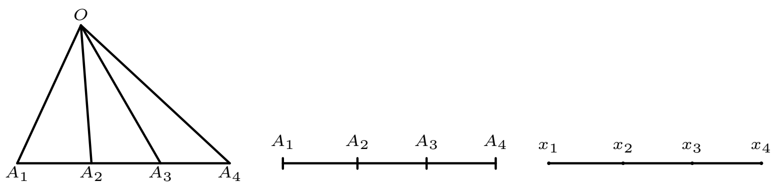
例題 **1.1** 給一凸四邊形，求作一三角形使其面積相等。

〔證〕右圖是一個給定的凸四邊形 $ABCD$。先連接對角線 AC，再作直線 DE 與 AC 平行，並交直線 BC 於 E 點。因為 $ACED$ 為梯形，所以 $\pi_1 = \pi_2$。故三角形 ABE 的面積與四邊形 $ABCD$ 的面積相等。



☒

例題 **1.2** 〈圖一〉中的 A_2, A_3 是三角形 OA_1A_4 邊 A_1A_4 上的兩個點，〈圖二〉中的 A_1, A_2, A_3, A_4 是線段上的四個點，〈圖三〉中的 x_1, x_2, x_3, x_4 是數線上的四個點座標。



〈圖一〉　〈圖二〉　〈圖三〉

證明底下三個等式成立：

$$\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4;$$
$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4;$$
$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2).$$

〔解〕如果令 $\triangle OA_1A_2 = p, \triangle OA_2A_3 = q, \triangle OA_3A_4 = r$，那麼第一個等式就相當於證明式子

$$pr + q(p + q + r) = (p + q)(q + r)$$

成立。但是它是一則恆等式，故一定相等。

將第一個等式的三角形面積用基本面積公式

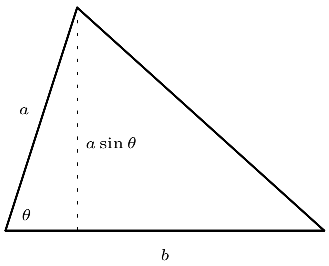
$$\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$$

代入，因為它們的高都一樣，所以得到第二個等式成立。

將第二個等式中的線段長度改成數線上的座標相減得到第三個等式。 ⊠

1.2 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$⋯三角學想法

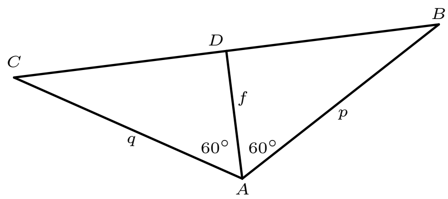
右圖是一個邊長為 a, b，且這兩邊夾角為 θ 的三角形，此時高為 $a\sin\theta$。因此三角形的面積公式為



$$\frac{\text{底} \times \text{高}}{2} = \frac{b \cdot a\sin\theta}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

七十二年度的大學聯考就考過這面積公式的應用問題：

例題 **1.3** 右圖是一個邊長為 p, q，且這兩邊夾角為 $120°$ 的三角形，其分角線長 f。證明



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

〔解〕由

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$$

得到

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC\sin 120° = \frac{1}{2}AB \cdot AD\sin 60° + \frac{1}{2}AC \cdot AD\sin 60°.$$

整理得到

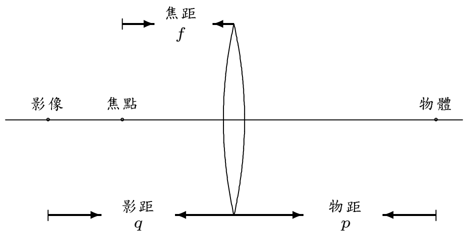
$$pq = pf + qf,$$

即

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

⊠

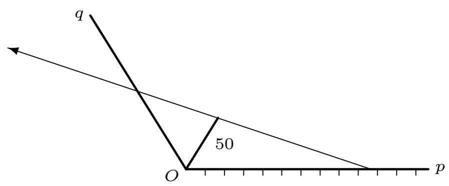
例題 1.3 中的等式，無論是在數學方面或是在實際生活中，都扮演著極其重要的角色。就以照相機或眼睛的影像原理為例，下圖是一個焦距為 f 的凸透鏡：



物體與中心的距離 p（稱為物距），經過透鏡產生的影像與中心的距離 q（稱為像距）會滿足透鏡公式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}.$$

連結例題 1.3 與透鏡公式，可以設計一把估算像距的計算尺。就以焦距是 50 mm 的照相機為例，右圖的 p 軸與 q 軸的夾角為 $120°$，分角線長度是 50 mm。照相機欲拍一張在它的透鏡前面 300 mm 處的一朵花，此時透鏡與底片的距離應調整為多少 mm 呢？算法很簡單，先在 p 軸取座標為 300 mm 的點，過此點與分角線的端點作一射線，射線與 q 軸的交點座標就是透鏡與底片的對應距離。



例題 **1.4** 請完成底下與照相機相關的問題：

(1) 利用透鏡公式計算上述情境下，透鏡與底片的距離應調整為多少 mm？

(2) 如果照相機使用伸縮鏡頭來拍攝花的照片，花在透鏡前 180 mm 處，透鏡被調整使得透鏡與底片的距離是 45 mm。在此設定下，求透鏡的焦距是多少 mm？

〔解〕計算如下：

(1) 由透鏡公式得到

$$\frac{1}{300}+\frac{1}{q}=\frac{1}{50}\Rightarrow q=60\text{（mm）。}$$

(2) 由透鏡公式得到

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{180}+\frac{1}{45}=\frac{1}{36}\Rightarrow f=36\text{（mm）。}$$

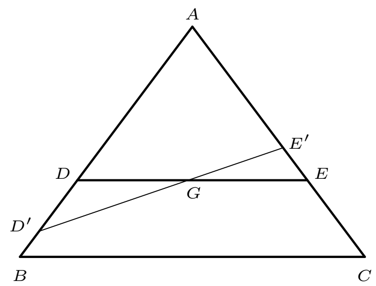
$\boxtimes$

下個例題是成功大學數學系推薦甄試考過的問題，事實上，它是正三角形的 Winternitz 定理：

例題 **1.5** 右圖，G 是正三角形 ABC 的重心，DE 與邊 BC 平行，而 $D'E'$ 是過重心 G 的另一條線段。

(1) 比較三角形 DGD' 與三角形 EGE' 的面積大小關係。

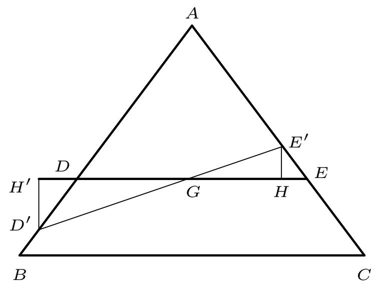
(2) 過重心 G 的任一線段將正三角形分割成一個三角形與一個四邊形，證明三角形的面積 $\geq \frac{4}{9}$ 倍正三角形的面積。



〔解〕解法如下：

(1)：如下圖的輔助線所示：直角三角形 $GD'H'$ 與 $GE'H$ 相似，又 $GH' > GH$。因此 $D'H' > E'H$。
由面積公式得到

$$\triangle DGD'=\frac{1}{2}DG\cdot D'H';$$
$$\triangle EGE'=\frac{1}{2}EG\cdot E'H.$$



因為 $DG = EG, D'H' > E'H$，所以

$$\triangle DGD' = \frac{1}{2}DG \cdot D'H' > \frac{1}{2}EG \cdot E'H = \triangle EGE'.$$

(2)：由 (1) 知道

$$\triangle AD'E' \geq \triangle ADE.$$

因為 G 是正三角形的重心，所以

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}.$$

因此

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} = \frac{4}{9}.$$

故

$$\triangle AD'E' \geq \triangle ADE = \frac{4}{9}\triangle ABC.$$

$\boxtimes$

1.3 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$⋯海龍公式

用來計算三角形面積的海龍公式，實際上是阿基米德所發現的，而海龍的貢獻是給予這漂亮公式證明。

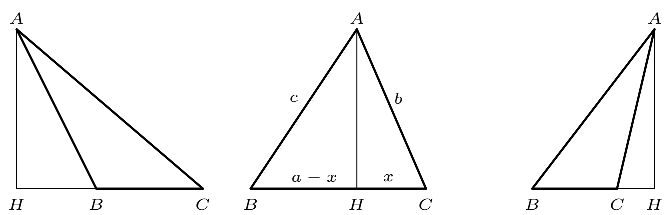
例題 **1.6** (海龍公式) 設三角形 ABC 的邊 $AB = c, BC = a, CA = b$，令

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

三角形 ABC 的面積為

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

〔證〕設 AH 是高，H 在直線 BC 上的點有如下三種：



就以中間的圖為例，由直角三角形 ABH 與 ACH 的畢氏定理得到

$$c^2-(a-x)^2=AH^2=b^2-x^2 \Rightarrow x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

因此高 AH 滿足

$$AH^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2.$$

解得

$$\begin{aligned} AH&=\sqrt{\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)}\\ &=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a}. \end{aligned}$$

故三角形 ABC 的面積為

$$\begin{aligned} \frac{BC\cdot AH}{2}&=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}\\ &=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

⊠

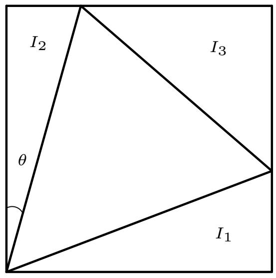
中國數學家秦九韶在《數書九章》卷五第二題中也提到類似海龍公式的面積公式，稱它為三斜求積術：若三角形的三個邊長分別是大斜，中斜，小斜，則三角形面積為

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left[\text{大斜}^2\text{小斜}^2-\left(\frac{\text{大斜}^2+\text{小斜}^2-\text{中斜}^2}{2}\right)^2\right]}.$$

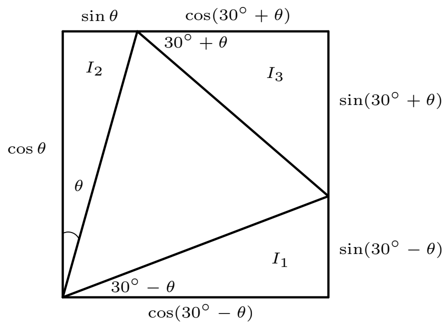
成功大學數學系申請入學考過如下的面積問題：

例題 **1.7** 一正三角形內接於一矩形內，如下圖。設 A_1,A_2,A_3 分別表圖中 I_1,I_2,I_3 之面積，試證明

$$A_1+A_2=A_3.$$



〔證〕令正三角形的邊長為 1，由圖中的 θ 及正三角形，可以推出如下的邊角關係：

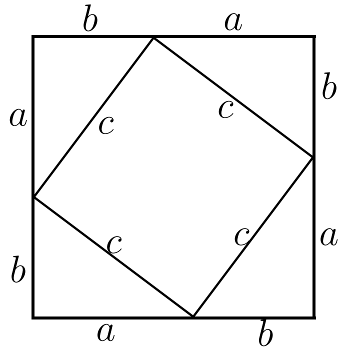


由面積公式得

$$\begin{aligned}
2(A_1+A_2) &= \sin\theta\cos\theta+\sin(30^\circ-\theta)\cos(30^\circ-\theta)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2\theta+\sin(60^\circ-2\theta)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\sin 30^\circ\cos(2\theta-30^\circ)\right)\\
&= \frac{1}{2}\cos(2\theta-30^\circ);\\
2A_3 &= \sin(30^\circ+\theta)\cos(30^\circ+\theta)\\
&= \frac{1}{2}\sin(60^\circ+2\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cos(30^\circ-2\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cos(2\theta-30^\circ).
\end{aligned}$$

故 $A_1+A_2=A_3$。 ⊠

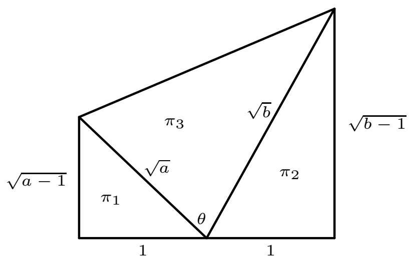
利用面積公式證明直角三角形的畢氏定理是古人留給我們的一種好方法，下圖是《周髀算經》的方形切割證法：



事實上，是將邊長為 c 的小正方形的四邊補上相同的直角三角形，使它成為邊長是 $a+b$ 的大正方形。借用面積公式得到畢氏定理：

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2} \Rightarrow a^2+b^2=c^2.$$

如下圖，左邊是邊長 $1, \sqrt{a-1}, \sqrt{a}$ 的直角三角形，右邊為邊長 $1, \sqrt{b-1}, \sqrt{b}$ 的直角三角形，而 π_1, π_2, π_3 是所在三個三角形的面積。

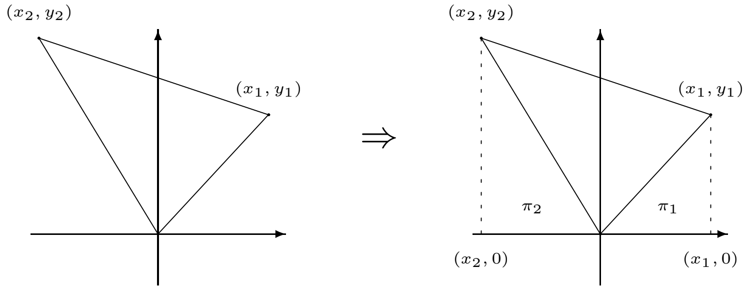


為了求得中間三角形的面積 π_3，我們透過左邊補上的直角三角形及右邊加上的直角三角形，形成一個梯形，來計算：

$$\begin{aligned}\pi_3 &= (\pi_1+\pi_2+\pi_3)-\pi_1-\pi_2\\ &= \frac{(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1})\cdot 2}{2} - \frac{\sqrt{a-1}\cdot 1}{2} - \frac{\sqrt{b-1}\cdot 1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}}{2}.\end{aligned}$$

1.5 $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$⋯笛卡爾之夢

笛卡爾是解析幾何的創始人之一，他希望將幾何問題當成代數運算來處理。如下圖中的左圖，將面積為 $\triangle$ 的三角形放在座標平面上，三個頂點座標依序為 $(0,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，笛卡爾面對的第一個問題當然是「如何將三角形的面積 $\triangle$ 用代數符號 x_1,x_2,y_1,y_2 來表示。」



為了解決這個問題，在三角形的東邊補上一個面積為 π_1 的直角三角形，在西邊補上另一個面積為 π_2 的直角三角形，如上圖中的右圖所示，經過補東補西之後，梯形這樣的好東西就成形了。因為直角三角形與梯形的面積容易計算，所以三角形的面積 $\triangle$ 可以表為

$$\begin{aligned}\triangle &= (\triangle + \pi_1 + \pi_2) - \pi_1 - \pi_2\\ &= \frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2} - \frac{x_1y_1}{2} - \frac{(-x_2)y_2}{2}\\ &= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1).\end{aligned}$$

細心的讀者應該注意到，推導過程中，把 x_2 當成負數計算，此乃 (x_2,y_2) 是在座標平面的第二象限的緣故。如果三角形的頂點都在第一象限（或者一點在第二象限，另一點在第三象限），那麼面積公式又如何呢？接下來就是要回答這麻煩的問題。三角學的面積公式與複數乘積的概念可以幫我們完整的回答這問題。

例題 **1.8** 設 $O(0,0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 為座標平面上三個點，令三角形 OAB 的面積為 $\triangle$。證明

$$\triangle = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

〔證〕三角形 AOB 的面積 $\triangle$ 滿足

$$\begin{aligned}
\triangle &= \frac{1}{2} OA \times OB \sin\theta \\
&= \frac{1}{2} OA \times OB \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{OA^2 \times OB^2 - (OA \times OB \cos\theta)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left| x_1y_2 - x_2y_1 \right|.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

為了確定 $x_1y_2 - x_2y_1$ 的正負值：

(1) 首先需要規範一下 O, A, B 三點間的相關位置：令 $\angle AOB = \theta (0 < \theta < \pi)$ 而且將原點 O 想成中心，B 點在 A 逆時針 θ 的方位上。

(2) 其次將以數對為主的座標平面換成以複數為主的高斯平面（複數平面），此時 O, A, B 所對應的複數分別為 $0+0i, x_1+y_1i, x_2+y_2i$。現在考慮複數

$$z = \frac{x_2+y_2i}{x_1+y_1i}.$$

(3) 說明複數 z 的虛部必為正數：設複數 x_1+y_1i 的幅角為 α，那麼複數 x_2+y_2i 的幅角為 $\alpha+\theta$。故複數 z 的幅角為 θ。因為 $0 < \theta < \pi$，所以複數 z 在 x-軸的上方，也就是複數 z 的虛部（y 座標）為正數。

(4) 計算複數 z 的虛部：

$$\begin{aligned} z &= \frac{x_2+y_2 i}{x_1+y_1 i} \\ &= \frac{(x_1-y_1 i)(x_2+y_2 i)}{x_1^2+y_1^2} \\ &= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y_1)i}{x_1^2+y_1^2} \end{aligned}$$

例題 **1.9** 設 $O(0,0), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 為座標平面上三個點，令三角形 OAB 的面積為 $\triangle$，$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$，而且將原點 O 想成中心，B 點在 A 逆時針 θ 的方位上。證明

$$\triangle = \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1).$$

〔解〕因為 z 的虛部大於 0，所以

$$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}>0 \Rightarrow x_1y_2-x_2y_1>0.$$

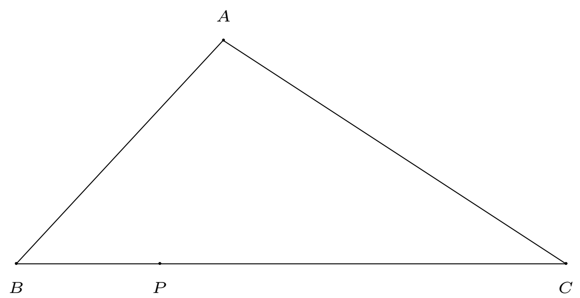
三角形 OAB 的面積 $\triangle$ 滿足

$$\triangle = \frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right| = \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1).$$

⊠

★★★★★　練習題　☆☆☆☆☆

練習 **1.1** 如下圖所示：P 在三角形 ABC 的邊 BC 上。利用直尺與圓規畫一通過 P 點，且將三角形 ABC 的面積平分的直線。



練習 **1.2** 仔細回顧你所學過的數學，是否還有可以用來計算透鏡公式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}.$$

的計算尺。

練習 **1.3** 在例題 1.5 的正三角形 ABC 中，導出線段長度

$$DD', EE', DE$$

的關係。

練習 **1.4** 三角形 ABC 中，$\angle A$ 的分角線長 l，$AB=c, AC=b$。證明

$$\cos\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

練習 **1.5** 設 p, q 是介於 0 與 1 之間的實數。

(1) 證明

$$\frac{1}{p}+p, \frac{1}{q}+q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q,$$

可以構成三角形三邊邊長。

(2) 求此三角形面積及內切圓半徑。

(3) 設三角形為 ABC 且

$$AB=\frac{1}{q}+q, AC=\frac{1}{p}+p, BC=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q$$

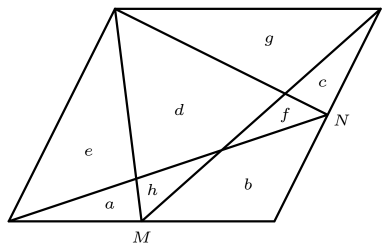
若 A 在邊 BC 上的垂足為 H，則求高 AH 的長度。

(4) 求 BH 與 CH 的長度。

練習 **1.6** 下圖是一個平行四邊形，M 與 N 是四邊形邊上的任意點，而

$$a, b, c, d, e, f, g, h$$

分別代表所在多邊形區域的面積。



(1) 證明

$$e+f=g+h.$$

(2) 證明

$$a+b+c=d.$$

練習 **1.7** 設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 是凸五邊形，令 $\pi_{ij}(1\le i,j\le 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積。

(1) 若 α,β,γ 是任意三個角，則證明三角恆等式

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

(2) （Monge 公式）證明

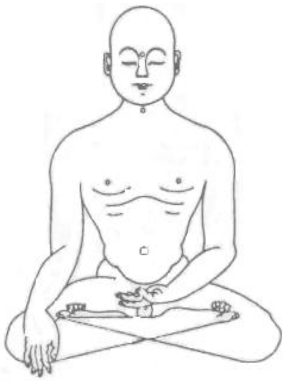
$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

(3) 利用 (1) 的結果證明托勒密定理，即圓內接四邊形 $ABCD$ 會有

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

的關係式。

2 用格子點串起的面積公式



數學經文

格子點，井然有序地座落在平面上的孤立點，他們沒有輕重之分，也無好壞之別。穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面⋯一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介。

欲瞭解幾何與代數的融合，需時常唸誦華羅庚的名言「數與形，本是相倚依，焉能分作兩邊飛，數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔裂分家萬是非，切莫記，幾何代數統一體，永遠聯繫，切莫分離。」

指考《數學乙》考過如下的填充題：
當平面上的點 (x, y) 之座標 x 與 y 都是整數，稱點 (x, y) 為格子點。數學家知道：座標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式

$$aS + bI + c$$

來表示，其中 S 代表三角形的周長上（三邊邊上）的格子點數，I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數，a, b, c 是固定的常數。求常數 a, b 與 c 的值。

這是有名的皮克公式，只需選定幾個以格子點為頂點的三角形便能求得公式中的常數 a, b 與 c 的值。現在讓我們以不同的角度來探索皮克公式！

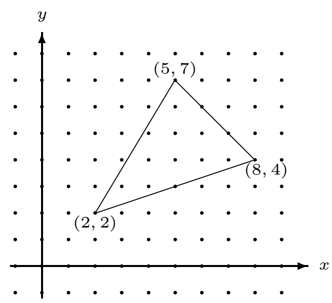
題目： (皮克公式) 以格子點為頂點的三角形面積可表為

$$\frac{S}{2} + I - 1$$

的形式。

2.1 井然有序的格子點

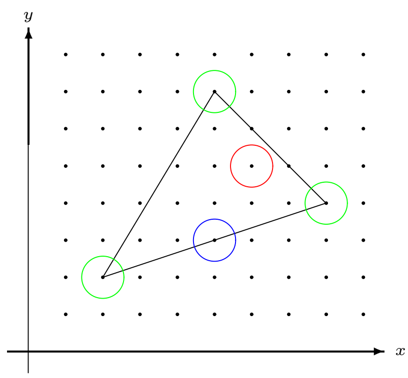
如下圖所示，x 與 y 座標都是整數的點（稱它們為格子點）井然有序的分佈於整個平面上：



觀察以格子點 $(2,2),(5,7),(8,4)$ 為頂點的三角形，內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。內部每個格子點附近的區域都在三角形內；而邊上的格子點中，在邊上但不是頂點的格子點附近幾乎有一半的區域在三角形內部，另一半在外部；但頂點附近，絕大部分的區域都在三角形外部。因此，三角形面積受其內部與邊上的格子點數影響。在下一小節中，我們將精細的討論這影響有多大。

2.2 用格子點串起的念珠⋯皮克公式

在前一小節中，我們將三角形內部或邊上的格子點區分成三類：內部格子點，邊上非頂點格子點與頂點格子點。現在各取一點為圓心，畫圓如下圖所示：



一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：
因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 I 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：
因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：
因為三內角和為 $180°$，所以三頂點附近的區域只能拼出 $\frac{1}{2}$ 單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

⊠

從“富有創意的思維”中，是否可以啟發你推導以格子點為頂點的四邊形，五邊形，⋯，甚至多邊形的面積公式呢？嘗試四邊形的情形看看！

練習 **2.1** 利用上述方法推導以格子點為頂點的四邊形面積公式（以符號 S, I 表示）。

2.3 師父中的師父

談到三角形的面積公式，不外乎會想到類似

$$\frac{\text{底}\times\text{高}}{2}, \frac{1}{2}ab\sin\angle C, \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

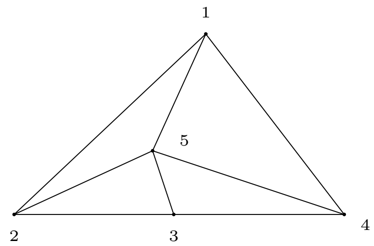
這樣的公式。這幾個面積公式的推導並不困難，而且其證明互有因果關係。不像皮克公式，自成一格，特別是公式中的常數 $\frac{1}{2}, 1, -1$ 充分反應了三角形內部、邊上與頂點這些格子點的份量。將幾何與代數完全融合，這也印證華羅庚說的「⋯數缺形時少直覺，形少數時難入微⋯」。皮克以三角形內部、邊上的格子點為珠子，然後用他腦中細微無形的線串出漂亮的「皮克公式」這串念珠。因此，皮克可以說是研究三角形面積公式的“師父中的師父”。

幾何圖形必須透過眼睛來欣賞與觀察，但是沒有耳朵的話，卻無法聆聽她所發出的天籟之音；同樣的，代數式子必須靠靈敏的

耳朵來聆聽，但是沒有眼睛的話，卻無法看到她所呈現的美貌。因此，「沒有幾何的代數是瞎子、沒有代數的幾何是聾子。」對一位眼、耳健全的人，不應輕易放棄她可以同時擁有欣賞與聆聽的本能。

你想當師父中的師父嗎？請完成底下的練習：

練習 2.2 (稜線定理) 十八世紀盛行的「三角測量」就是將欲丈量的凸多邊形切割成若干個小三角形來一一丈量。如下圖



就是一個三角形被切割成四個小三角形的情形，其中 $1, 2, 3, 4, 5$ 稱之為丈量點，兩丈量點之間的黑線（需丈量的線）稱之為丈量稜線（上圖中恰有 8 條丈量稜線）。

在丈量凸多邊形的所有丈量點數記為 B，內部（不含邊上）的丈量點數記為 I；所需丈量的丈量稜線數記為 S。

根據「三角測量」的經驗法則得知：會有實數 a, b, c 使得式子

$$S = aB + bI + c$$

恆成立。試以幾個實際的圖例求出 a, b, c 的值。

練習 2.3 (尤拉公式) 承練習 2.2 的符號，令丈量點與丈量稜線所分割出的三角形總數有 T 個。已知會有實數 a, b, c 使得式子

$$T = aB + bE + c$$

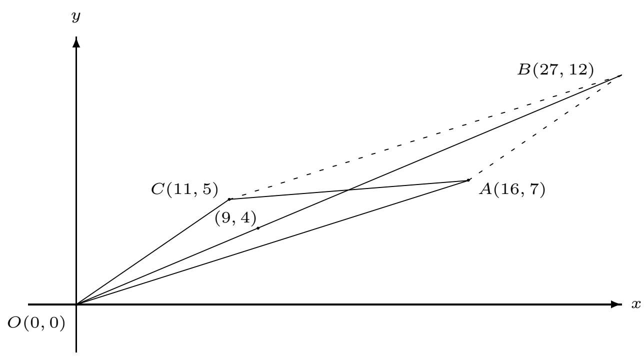
恆成立，試求 a, b, c 的值。

2.4 皮克公式的插曲

大家都很好奇「介於 $\frac{7}{16} < \frac{b}{a} < \frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$ 有無窮多個，究竟分母 a 最小的那個分數是誰呢？」你可曾想過皮克公式對這樣的問題是有幫助的。

請容許我先解釋一下這節中的部分數學經文「…穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面…一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介…。」

通過兩個格子點的直線之斜率剛好是“（兩格子點的 y 座標差）÷ （兩格子點的 x 座標差）” 這個有理數。相反的，有理數 $\frac{7}{16}$ 與 $\frac{5}{11}$ 可以想成是通過 $(0,0),(16,7)$ 與通過 $(0,0),(11,5)$ 這兩條直線的斜率。 考慮下圖



① 四邊形 $OABC$ 是一個平行四邊形， B 點座標為

$$(27,12)=(16,7)+(11,5).$$

直線 OB 通過格子點 $(9,4)$，且該直線的斜率為 $\frac{4}{9}$。

② 三角形 OAC 的面積為

$$\frac{1}{2}|11\cdot 7-16\cdot 5|=\frac{3}{2}.$$

③ 三角形 OAC 的邊上格點僅頂點 3 個而已，根據皮克公式知道

$$\frac{3}{2}+I-1=\frac{3}{2}\Rightarrow I=1.$$

因此三角形 OAC 的內部格子點數僅一點，即 $(9,4)$ 是三角形 OAC 內部唯一的格子點。

綜合得到：通過 $(0,0),(9,4)$ 的直線的斜率 $\frac{4}{9}$ 是介於 $\frac{7}{16}<\frac{b}{a}<\frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$，分母 a 最小的那個。故答案為

$$\frac{4}{9}.$$

$\boxtimes$

練習 **2.4** 考慮底下兩個問題：

(1) 試求以 $(0,0),(8,5),(13,8)$ 為頂點的三角形內部格子點之數目。

(2) 求介於 $\frac{5}{8}$ 與 $\frac{8}{13}$ 之間分母最小的分數。

2.5 宰相肚裡可撐船

這節對皮克三角形面積公式

$$\frac{S}{2}+I-1$$

與練習 2.2 的稜線定理

$$S=2B+I-3$$

作解釋如下：

① 皮克公式 $\frac{S}{2}+I-1$：
由公式得知，三角形邊上每個格子點的貢獻是 $\frac{1}{2}$；但三角形內部的每個格子點之貢獻是 1。因此，內部格子點數越多的三角形，其面積就越大。

② 稜線定理 $S=2B+I-3$：
此公式說，邊上每設立一丈量點會貢獻出 2 條丈量稜線；但內部每設立一丈量點會貢獻出 3 條丈量稜線。欲使丈量稜線越少，應儘可能將丈量點設在邊上，不要設在內部。也就是說，內部丈量點越多的多邊形，其丈量稜線就越多。

2.6 十牛圖的啟示

從畢達哥拉斯的畢氏定理，將直角三角形與代數 $c^2=a^2+b^2$ 相連結，皮克公式，將格子點三角形面積與代數 $\frac{S}{2}+I-1$ 相連繫，到稜線定理，將多邊形與代數 $S=2B+I-3$ 相銜接，都讓華羅庚

的名言「數缺形時少直覺，形少數時難入微」餘音繞樑，三月不止。這樣的例子不僅數學上有，其它領域也不遑多讓。在十二世紀時，宋朝廓庵禪師對修行、求法的過程作了前無古人，後無來者的妙喻，且讓我們接受他的點化吧！

《十牛圖》最初有八幅畫，不是十幅，它們不是佛教的，是道教的。它們的起始不詳，沒有人知道它們是怎麼開始的，誰畫出了第一幅牛圖。但在十二世紀，宋朝廓庵禪師把它們重畫了一遍，不僅如此，他還增加了兩幅畫，八幅變成了十幅。這十圖分別為一、尋牛，二、見跡，三、見牛，四、得牛，五、牧牛，六、騎牛歸家，七、忘牛存人，八、人牛俱忘，九、返本還源，十、入世垂手。

廓庵畫《十牛圖》的目的，是為了探尋“禪宗的修行、求法”這不可表達的內在旅程作出獨特的嘗試。但他畫了《十牛圖》後並不滿足，於是他寫了詩來補充，作為附錄。首先他畫了這十幅圖畫；覺得不滿意，他寫了十首小詩，畫中缺了什麼，他就嘗試在詩歌中補充它們。他還是覺得不滿意。於是他又寫了十篇散文注釋。我知道他一定仍然覺得不滿意，但沒有什麼可做了。真實是博大的，表達是有限的，但他盡了最大的努力。

對修行者來說：「圖畫是無意識的語言，它是視覺化的語言；文字是有意識的語言，它是頭腦裡的語言；而詩歌是潛意識的語言，它是溝通圖與文字的橋樑。」圖、詩歌與文字都無法完全描述修行、求法的全部，但圖可以無限想像，可以給點暗示，詩歌與文字可以補充說明，兩者對內在旅程的探尋不無小補；但對數學家來說：「幾何是欣賞的語言，它是視覺化的語言；而代數是聆聽的語言，它是思考化的語言。」幾何圖形永遠無法十分精確，但提供無限的想像與漣漪，代數式子很難有浪漫的聯想，但提供慎密的解釋；因此幾何與代數的互補性足以刻畫科學的現象與性質。

在此提供《十牛圖》的幾個圖供參考，值得注意的是第八圖是個空圖，就是“空無”的意思。

第一圖：尋牛

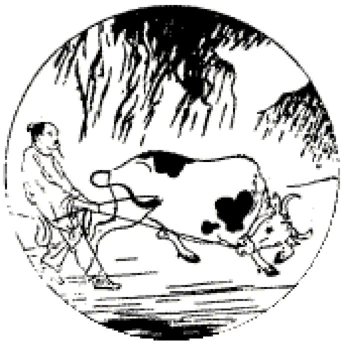
忙忙撥草去追尋，
水闊山遙路更深。
力盡神疲無處覓，
但聞楓樹晚蟬吟。

第二圖：見跡

水邊林下跡偏多，
芳草離披見也麼，
縱是深山更深處，
遼天鼻孔怎藏他？

第三圖：見牛

黃鶯枝上一聲聲，
日暖風和岸柳青，
只此更無回避處，
森森頭角畫難成。



第四圖：得牛

竭盡精神獲得渠，
心強力壯卒難除，
有時才到高原上，
又入煙雲深處居。

第五圖：牧牛

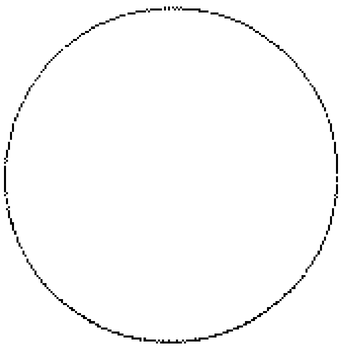
鞭索時時不離身，
恐伊縱步入埃塵，
相將牧得純和也，
羈鎖無拘自逐人。

第六圖：騎牛歸家

騎牛迤邐欲還家，
羌笛聲聲送晚霞。
一拍一歌無限意，
知音何必鼓唇牙。

第七圖：忘牛存人

騎牛已得到家山，
牛也空兮人也閑，
紅日三竿猶作夢，
鞭繩空頓草堂間。



第八圖：人牛俱忘

鞭索人牛盡屬空，
碧天寥廓信難通。
紅爐焰上爭熔雪，
到此方能合祖宗。

第九圖：返本還源

返本還源已費功，
爭如直下若盲聾，
庵中不見庵前物，
水自茫茫花自紅。

第十圖：入世垂手

露胸跣足入世來，
抹土涂灰笑滿腮。
不用神仙真秘訣，
直教枯木放花開。