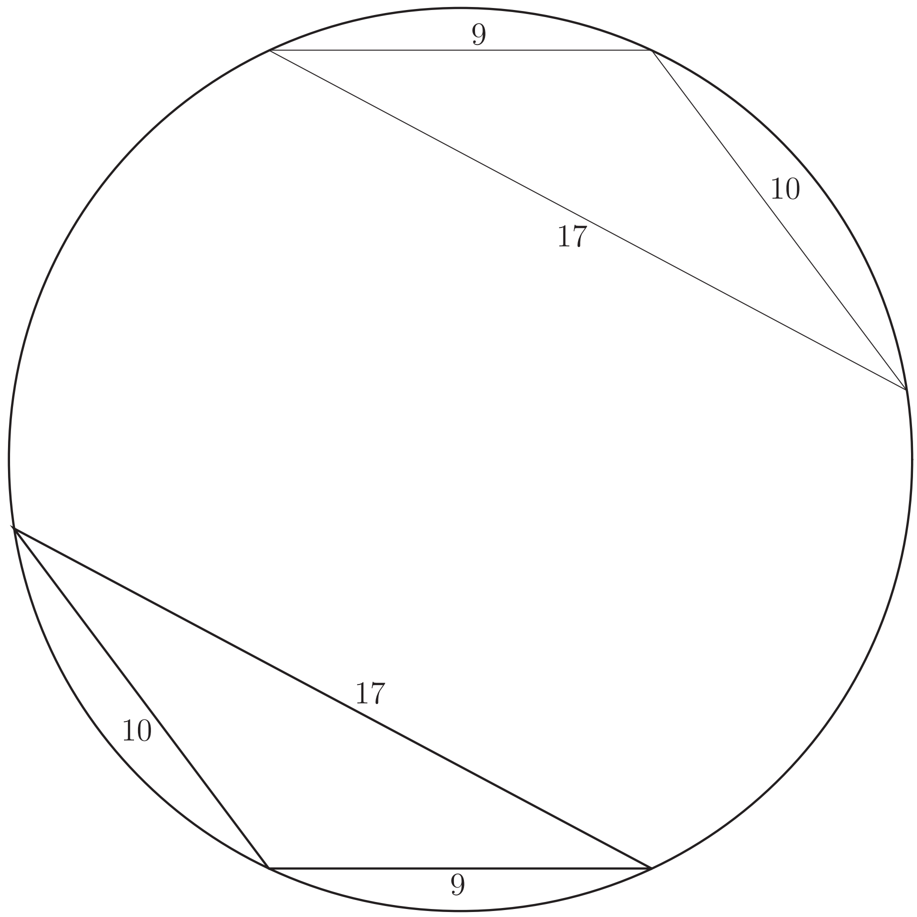
數 學 遊 戲 的 第 二 堂 課

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

June 15, 2005



三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數

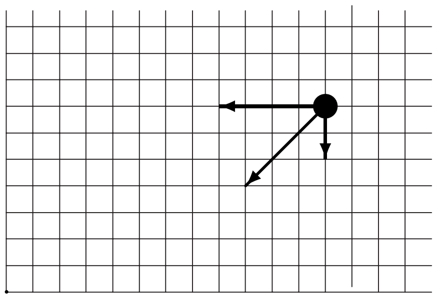
目 錄

1 一子棋的誘惑

古老的池塘，
青蛙跳入，
噗通！

在這個古老池塘中有一個又一個的漣漪，它們是一個又一個的同心圓，這些圓是完整的，也是完美的。只有圓才能夠了解完美，古希臘的畢達哥拉斯知道，義大利的詩人但丁也清楚：

題目：（一子棋遊戲）下圖是圍棋棋盤，一子棋是兩人玩的遊戲，甲先把一粒黑棋任意的擺放在棋盤的兩線交點上，擺好後，乙決定誰是先玩者，誰是後玩者。



遊戲規則如下：

① 先玩者與後玩者依序輪流移動黑棋。

② 可以向下，向左或向對角線方向移動任意格（如圖所示）。

③ 將黑棋移至左下頂點者贏。

對這樣的遊戲，贏的策略是什麼呢？

事實上，“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：早期到美國討生活的華僑勞工，很多都從事鐵路工人，他們趁著休息時刻，經常玩“拈”這道遊戲，它的遊戲規則是這樣的：

(1) 先玩者與後玩者依序輪流拿取兩堆預先給定的石頭。

(2) 可以從兩堆中的任一堆拿取任意顆的石頭或者同時從兩堆裡拿取石頭，但是拿取的個數必須一樣。

(3) 最後將兩堆石頭取完者贏。

“一子棋遊戲”那三個條件幾乎是“拈”這三個條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。

2 讓 43 跟 57 催眠你

台師大數學系趙文敏教授所著的《寓數學於遊戲》，是我大學期間看過的幾本通俗數學書籍之一。關於《寓數學於遊戲》這本書的內容，我只記得一道遊戲，那是因為教授師大數學系的暑期進修班時，需要比較軟性，又可以消暑解渴的數學教材，數學遊戲大概是最佳的選擇。於是想到那道遊戲，為了增加它的難度，或者說，創新一下，不要拾人牙慧，善用了學數論的專長，將那道遊戲稍微修改：

題目： 請對方從

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 50$$

裡想一個數（不要說出想的數），再從

$$43, \quad 57$$

這兩個數任選一個數（不要說出選的數）。現在將「想的數」與「選的數」相乘，你只需告訴我乘積的末兩位數，我就可以快速的猜出你「想的數」與「選的數」各為何？

舉例來說，當你「想的數」為 38，「選的數」為 43 時，因為 $38 \times 43 = 1634$ 的末兩位數為 34，所以只需告訴我 34，我就可以準確的說出「想的數」 38 與「選的數」 43 這兩個數。

試問這遊戲的奧秘為何？

數學遊戲就是用數學騙人的魔術，都是有破綻，可以用數學加以破解的。以這道遊戲為例，想的數共有 50 個，選的數有 2 個，這樣的搭配一共有

$$50 \times 2 = 100$$

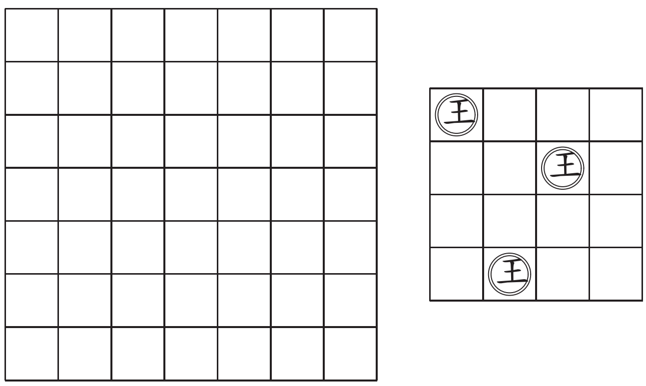
種。但是，乘積的末兩位數從 00 到 99 也有 100 種，所以找到一種對應規律是可以理解的。數學玩家希望的規律當然是易懂、易記，也亦操作的數學規則，最重要的是「這個規則必須不容易被拆穿與識破」。

練習 **1** 如果對方告訴你“乘積的末兩位數為 38”，那麼他「想的數」與「選的數」各為何？

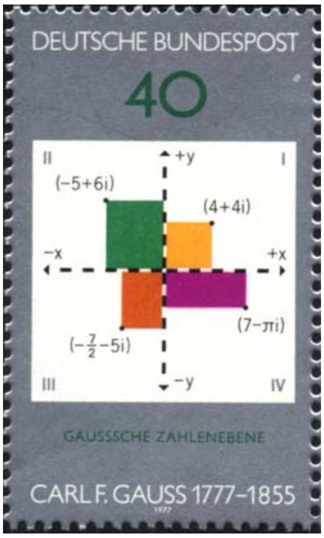
3 突破貝蒙障礙的奇人

《數學解題》這門課大概是要教授類似波里雅《如何解題》那本書的內容，讓學生思考些既靈活、又有趣一點的問題是必須的。剛教授這門課的前幾年，我都會舉一道〈國王的煩惱〉的數學遊戲讓學生動動腦。這道遊戲是這樣說的：

題目： 在 7×7 的棋盤上（共有 49 個方格）。當一位國王站在某一個格子內時，以此格子為中心的平行、垂直及兩條對角線上的格子都是此國王管轄的範圍。請問：至少需要幾位國王，才有辦法管轄整個棋盤（注意：非國王所在的方格可以由兩個以上的國王共管，但是國王所在的方格不能由兩個以上的國王共管，也就是王不見王的意思）。例如下圖是三個國王管轄 4×4 棋盤的情形：



4　使用數學，不要被數學所使用



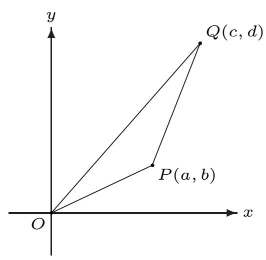
1831 年高斯認為複數不夠普及，在《哥庭根學報》上詳細說明坐標平面上的一個點 (a,b) 可以用複數 $a+bi$ 來表示，並建立了複數的某些運算，使得複數的運算也像實數一樣地代數化。 次年他發表了一篇備忘錄，第一次提出“複數”這個名詞，奠定複數在數學的地位。左圖是一張以複數平面為背景的郵票，這是為了紀念高斯大量的使用複數。對於一位創造數學概念，使用數學概念的人，發行郵票紀念他是應該的，總比紀念那些被數學所使用的人好。

我與“數學概念”這位奇人相遇的幾則小故事是在談論「中學學過的一些數學概念，如何在我解題過程中，扮演臨門一腳的角色，也讓我見識到“數學概念”這位巨人的魅力與威力。」幸虧有數學前輩們嘔心瀝血的提出這些“數學概念”，否則會走許多冤枉路。所以這裡的奇人就是“數學概念”，我只是安靜的觀察他們如何對問題下手的「觀察者」而已，或者說，我是“數學概念”的「粉絲」（fans）。

題目： (使用斜率) 如右圖所示，設 $P(a,b)$ 與 $Q(c,d)$ 是坐標平面第一象限上的兩個點。試判斷

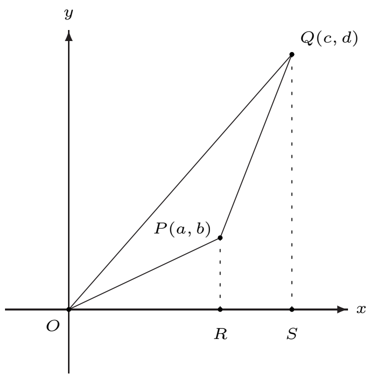
$$ad-bc$$

的正、負情形。



單從圖形來看，似乎可知 $a<c$ 與 $b<d$，但這樣的不等式只能推得 $ab<cd$，無法判斷 ad 與 bc 的大小。接下來，我們想透過與引進各種不同的“數學概念”來轉化與解決這個問題：

① （與面積相遇）考慮三角形 PQO，透過“面積”的概念來判斷 $ad-bc$ 的正負：為了求 PQO 的面積，作 P 與 Q 在 x 軸的垂足為 R 與 S：



計算

$$\begin{aligned}\triangle PQO &= \triangle QOS - \triangle POR - \text{ 梯形 } PRSQ \\ &= \frac{c\cdot d}{2} - \frac{a\cdot b}{2} - \frac{(b+d)\cdot(c-a)}{2} \\ &= \frac{ad-bc}{2},\end{aligned}$$

得兩倍三角形 PQO 的面積為 $ad-bc$，即

$$ad-bc>0.$$

② （與斜率相遇）將 P 與 Q 分別與原點作連線，得直線 PO 與 QO，考慮這兩條直線的斜率，得 OP 的斜率 $\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$ 與 OQ 的斜率 $\frac{d-0}{c-0}=\frac{d}{c}$。現在比較斜率大小，因為直線 OP 比直線 OQ 不傾斜，所以得

$$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{ad-bc}{ac}>0.$$

又 a,c 都是正數，所以

$$ad-bc>0$$

恆成立。

③（與複數相遇）將點 $P(a,b)$ 與 $Q(c,d)$ 想成高斯平面上所對應的複數 $a+bi$ 與 $c+di$。這就是透過“複數”的概念，將點轉化成可以運算的複數。

由複數的定義及根據棣美佛定理，得

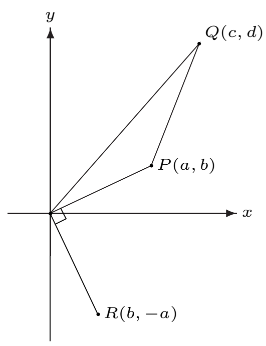
$$\begin{aligned}\frac{c+di}{a+bi} &= \frac{OQ(\cos\angle QOR + i\sin\angle QOR)}{OP(\cos\angle POR + i\sin\angle POR)} \\ &= \frac{OQ}{OP}\left(\cos(\angle QOR - \angle POR) + i\sin(\angle QOR - \angle POR)\right) \\ &= \frac{OQ}{OP}\left(\cos\angle QOP + i\sin\angle QOP\right),\end{aligned}$$

又 $0^\circ < \angle QOP < 90^\circ$，所以 $\sin\angle QOP > 0$，即複數 $\frac{c+di}{a+bi}$ 的虛部是正實數。由

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

得 $ad-bc>0$。

④（與向量相遇）如下圖所示，令 R 點坐標為 $(b,-a)$。



這裡產生三個平面向量 $\overrightarrow{OP}=(a,b), \overrightarrow{OR}=(b,-a)$ 與 $\overrightarrow{OQ}=(c,d)$。由

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR} = ab+b(-a)=0,$$

得 $\angle POR = 90^\circ$，即 $90^\circ < \angle QOR < 180^\circ$。利用向量內積公式

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR} = \overline{OQ}\cdot\overline{OR}\cos\angle QOR < 0,$$

得

$$cb + d(-a) < 0,$$

即 $ad - bc > 0$。

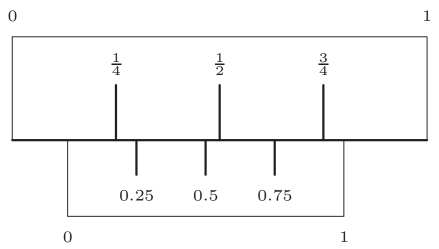
$\boxtimes$

坐標平面上的三角形、直線與點原本是幾何的東西，但是透過「面積」、「斜率」、「複數」與「向量」，將幾何的層面導引到可以運算的代數層次，而且這些概念都是中學就學會的基本工具。

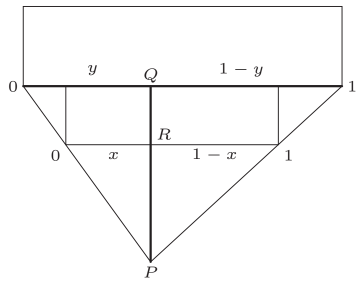
每人心中各有一把尺，但你的尺跟我的尺有共同的交點嗎？讓“幾何相似”這概念來說明吧！

題目： (使用幾何相似) 右圖是兩把大小不一樣，但是刻度都是介於 0 與 1 之間的尺，將其刻度的邊任意的對在一起。

證明大小兩把尺必有一相同的刻度對在一起。



考慮下圖，設小尺上 R 點的刻度為 x；大尺上 Q 點的刻度為 y。



利用三角形的相似性值，得

$$\frac{x}{y} = \frac{PR}{PQ} = \frac{1-x}{1-y} \Rightarrow x(1-y) = y(1-x),$$

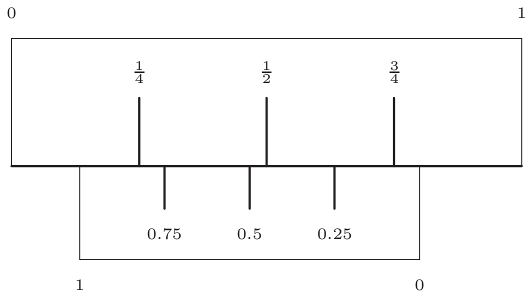
將兩邊乘開相消，得

$$x = y.$$

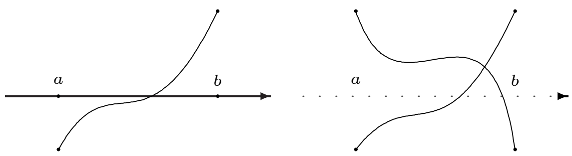
因此，Q 點所對應的大、小尺的刻度都一樣。 ☒

在日常生活中，碰到過兩種大小不一的刻度並排或並列嗎？溫度計就是一個例子，它有攝氏及華氏兩種刻度。將上面作法使用在溫度計時，你將發現 -40℃ 與 -40°F 的刻度是在同一高度上。

練習 **2** 如下圖所示，將小尺調個頭與大尺接觸，是否他們仍會有相同的刻度對在一起。



「勘根定理」是說「當 $f(a)f(b) < 0$ 時，$f(x) = 0$ 有一介於 a 與 b 之間的實數根。」其實比較好的講法是「從 $x = a$ 畫到 $x = b$ 的兩條曲線，如果在 $x = a$ 時，第一條在第二條的上方，而在 $x = b$ 時，第二條在第一條的上方，那麼這兩條曲線必定在中途相遇過。」

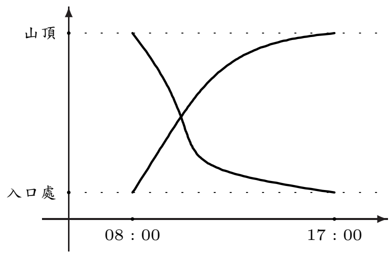


在「勘根定理」中使用的兩條曲線就是 $y = f(x)$ 與 x 軸。

題目：(使用勘根定理的概念) 和尚每逢週末都有兩天的朝聖之旅。週六的早上八點，準時從山腳下的入口處山發，傍晚五點準時到達山頂的寺廟；週日則是早上八點，準時從寺廟出發，走昨天經過的路，並準時於傍晚五點返回山腳的入口處。

在這兩天的朝聖行程裡，會有某個時刻，他們剛好在同一個地點。

使用勘根定理來解，將 x 軸當時間，y 軸當登山路徑的對應距離。將週六、日的速度圖畫出，會得到像下圖的兩條曲線：

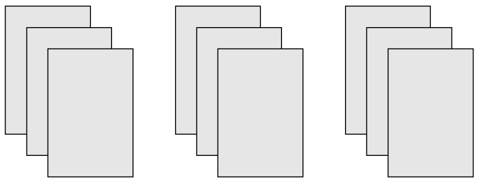


因為下山的路徑與上山的路徑在早上八點與下午五點各有高低，所以由勘根定理知，兩條路徑會相交於一點，此點就是所求的點，它所對應的時間就是相遇的時刻。

利用幻象解法，將兩天的登山疊在一起，也就是早上八點，有人從入山口登山（週六），也同時有人從山頂下山（週日），他們都是在下午五點到達目的地，顯然他們一定在某個時刻會相遇。相遇的點與時間就是所求的。 ⊠

日常生活中，“勘根定理”這個概念經常被使用，只是你沒有發覺而已，例如早上你搭客運從台北到高雄，而同時你的友人從高雄也搭客運來台北。雖然兩人不可能聚在一起，但是某個時刻，你們在路上肯定是相遇過的。又如颱風有颱風眼，微笑會有酒窩，頭髮會有旋轉中心，這些都是球面上“勘根定理”的例子。

題目：(使用未知數) 老師背對著學生，讓學生按下列四個步驟操作：



① 分發左、中、右三堆牌，每堆牌不少於兩張，且各堆牌現有的張數一樣；

② 從左邊一堆拿出兩張，放入中間一堆；

③ 從右邊一堆拿出一張，放入中間一堆；

④ 左邊一堆有幾張牌，就從中間一堆拿幾張牌放入左邊一堆。

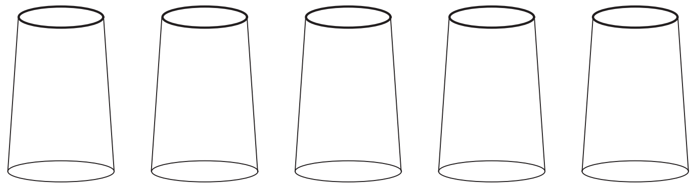
這時老師準確說出了中間一堆牌現有的張數，你認為奧妙在哪呢？

假設第 ① 步時，（左、中、右）的牌數為 (x, x, x)，在第 ② 步時，變成 $(x-2, x+2, x)$，又第 ③ 步時，變成 $(x-2, x+3, x-1)$，最後第 ④ 步時，變成

$$(2(x-2), (x+3)-(x-2), x-1) = (2x-4, 5, x-1).$$

所以中間那堆牌最後的張數都是 5 張。 ⊠

練習 **3** (使用 $+1$ 與 -1 的概念) 桌上有五只茶杯，杯口都朝下，每次運動只能將兩只茶杯翻轉。請問有辦法在若干次運動之後，讓所有的茶杯杯口都朝上嗎？



練習 4 (使用面積公式) 如下圖所示，圓規的柄長 $CA = CB = 8$，當圓規張開的張角為 θ 時，會圍出一個三角形 ABC。問：當 θ 為何值時，三角形 ABC 的面積最大，是多少？