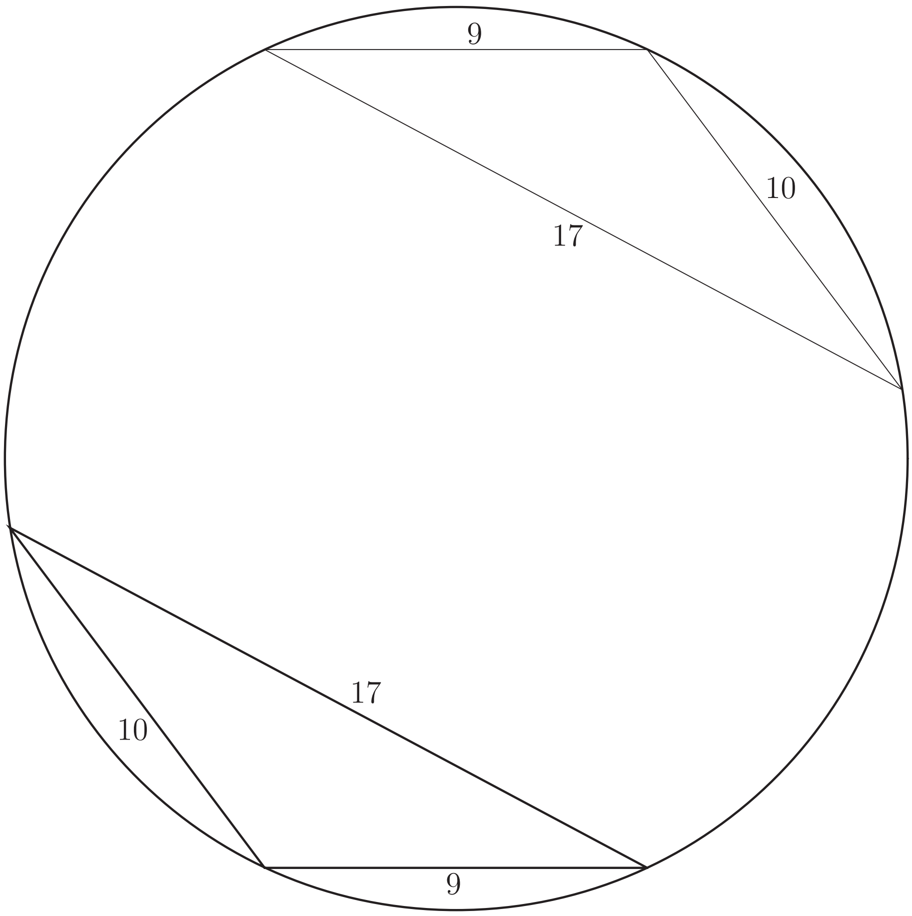
# 成 功 高 中 數 學 營

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

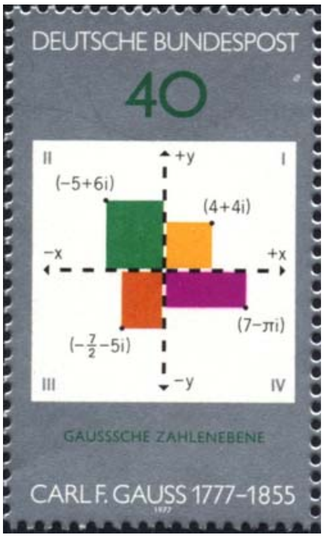
June 16, 2005




三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數

目 錄

## 1　使用數學，不要被數學所使用




1831 年高斯認為複數不夠普及，在《哥庭根學報》上詳細說明坐標平面上的一個點 $(a,b)$ 可以用複數 $a+bi$ 來表示，並建立了複數的某些運算，使得複數的運算也像實數一樣地代數化。次年他發表了一篇備忘錄，第一次提出“複數”這個名詞，奠定複數在數學的地位。左圖是一張以複數平面為背景的郵票，這是為了紀念高斯大量的使用複數。對於一位創造數學概念，使用數學概念的人，發行郵票紀念他是應該的，總比紀念那些被數學所使用的人好。

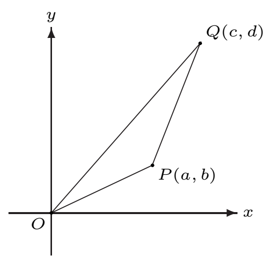
我與“數學概念”這位奇人相遇的幾則小故事是在談論「中學學過的一些數學概念，如何在我解題過程中，扮演臨門一腳的角色，也讓我見識到“數學概念”這位巨人的魅力與威力。」幸虧有數學前輩們嘔心瀝血的提出這些“數學概念”，否則會走許多冤枉路。所以這裡的奇人就是“數學概念”，我只是安靜的觀察他們如何對問題下手的「觀察者」而已，或者說，我是“數學概念”的「粉絲」（fans）。

---

題目：（使用斜率）如右圖所示，設 $P(a,b)$ 與 $Q(c,d)$ 是坐標平面第一象限上的兩個點。試判斷

$$ad-bc$$

的正、負情形。




---

單從圖形來看，似乎可知 $a<c$ 與 $b<d$，但這樣的不等式只能推得 $ab<cd$，無法判斷 $ad$ 與 $bc$ 的大小。接下來，我們想透過與引進各種不同的“數學概念”來轉化與解決這個問題：

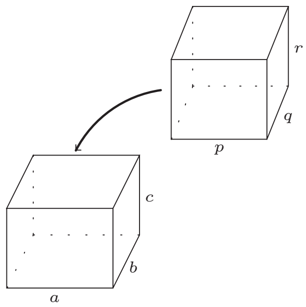
你利用 7-11 的「黑貓宅急便」寄過東西嗎？如果寄過，就會知道它的費率是根據箱子長、寬、高這三個長度的“和”（俗稱「包裹尺寸」）來計算。下表是統一宅急便運費表（同一縣市）：

| 包裹尺寸 | 60 cm | 61 ∽ 90 cm | 91 ∽ 120 cm | 121 ∽ 150 cm |
|---|---|---|---|---|
| 宅急便 | 110 元 | 150 元 | 190 元 | 230 元 |

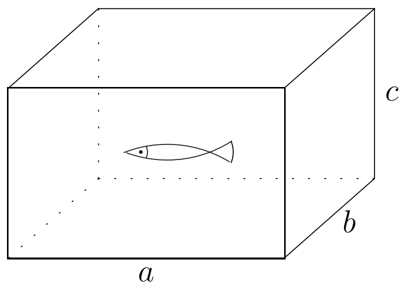
讓我們研究一下長方體的長、寬、高所隱藏的奧秘！

題目：（使用拋物線的開口）

如右圖所示，長、寬、高為 $p, q, r$ 的箱子可以以適當傾斜的角度或特殊擺放方式，整個放入另一個長、寬、高為 $a, b, c$ 的箱子裡。試問 $a+b+c$ 是否一定比 $p+q+r$ 來得大呢？




想要使用好的“數學概念”解題，必須帶點想像力才行，讓我們把長方體想成透明玻璃製成的水族箱，裡頭養著一條觀賞魚。這條觀賞魚的視力有限，只能看見距離眼睛 $x$ 以內的空間，所以當觀賞魚貼近水族箱邊緣時，除非將你的手放置在離水族箱邊緣 $x$ 的範圍內，否則你對牠的招手是無效的。當觀賞魚在水族箱內到處游動時，牠所能看見的空間體積有多大呢？（這跟把一頭牛綁在一根木樁上，求牛所能吃到的草皮面積很像吧！）讓我們來計算一下吧！




在計算觀賞魚所能看見的空間體積時，你可以把自己想成那條觀賞魚，所在的房間視為魚缸。首先，魚缸內部是觀賞魚可游到，看到的空間，其體積為 $abc$；前後左右上下延伸 $x$ 的六塊長方體也是觀賞魚可向外看見的空間，其體積為 $2(ab+bc+ca)x$；十二條棱線中，每條棱線向外畫出一個半徑 $x$ 的四分之一圓柱，也是觀賞魚可向外看見的空間，其體積為 $(a+b+c)\pi x^2$；最後八個頂點向外各畫出半徑 $x$ 的八分之一球，也是觀賞魚可向外看見的空間，合起來剛好一個球，其體積為 $\frac{4}{3}\pi x^3$。這些體積總和為

$$\frac{4}{3}\pi x^3+(a+b+c)\pi x^2+2(ab+bc+ca)x+abc,$$

是觀賞魚可看到空間的體積。同法可得，在長、寬、高為 $p,q,r$ 的魚缸裡的觀賞魚，可看到空間的體積為

$$\frac{4}{3}\pi x^3+(p+q+r)\pi x^2+2(pq+qr+rp)x+pqr.$$

因為長、寬、高為 $p,q,r$ 的箱子可以以適當的角度或方式整個放入長、寬、高為 $a,b,c$ 的箱子裡，也就是說，長、寬、高為 $a,b,c$ 的觀賞魚所能看見的空間涵蓋長、寬、高為 $p,q,r$ 的觀賞魚所能看見的空間，即 $f(x)=\left(\frac{4}{3}\pi x^3+(a+b+c)\pi x^2+2(ab+bc+ca)x+abc\right)-\left(\frac{4}{3}\pi x^3+(p+q+r)\pi x^2+2(pq+qr+rp)x+pqr\right)\geq 0$，整理得到 $f(x)=(a+b+c-p-q-r)\pi x^2+2(ab+bc+ca-pq-qr-rp)x+(abc-pqr)\geq 0$。因為不等式是對所有的正實數 $x$ 都成立（想成換視力不一樣的觀賞魚），又 $y=f(x)$ 是拋物線或直線（此種情況 $a+b+c-p-q-r=0$），所以拋物線的開口必須向上，

即

$$a+b+c-p-q-r>0 \text{ 或 } a+b+c-p-q-r=0,$$

得到

$$a+b+c \geq p+q+r.$$

$\boxtimes$

笛卡爾創立直角坐標系，可以將許多平面幾何問題代數化處理，但是，那些應該定坐標系解決，那些不需要，是最難拿捏的地方。讓我們欣賞一道同時使用“直角坐標”與“有向角”這兩個數學概念的題目：

---

題目：(使用坐標與有向角) 印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方位上。

問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？

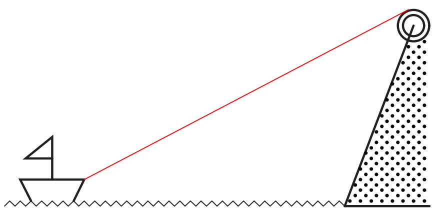
(太陽昇起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北)

---

「兩邊之和大於第三邊」是大家在日常生活中與數學課程裡非常熟悉的三角不等式。這個概念的使用有時候很容易，很明顯，但有時卻不容易發覺。底下就是一個例子

---

題目：(使用三角不等式) 如右圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。



---

在房子裡，想估算一間面積大小，最簡單的方式莫過於憑直覺。如果不靠直觀，另一個方便又準確的方法是「數鋪在地上的磁磚個數」。因為磁磚方方正正，每個大小相同，可以反應房間的大小。那麼，在直角坐標平面上，那個東西可以拿來當磁磚，

反應面積呢？皮克就用排列僅然有序的「格子點」來表示面積。讓我面來欣賞這一概念：

---

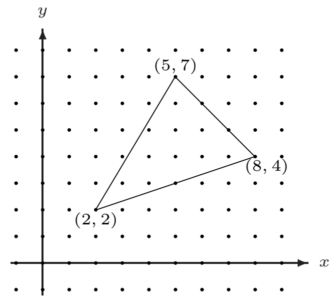
題目：(使用格子點的個數)

格子點是直角坐標平面上 $x$ 與 $y$ 坐標都是整數的點，如右圖所示，三角形內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。

皮克發現：內部有 $I$ 個格子點，邊上有 $S$ 個格子點的三角形面積為

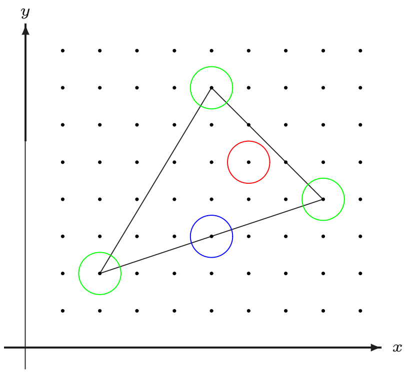
$$\frac{S}{2}+I-1.$$

你有比較好的方法解釋這公式的合理性嗎？




---

這個公式常稱為「皮克公式」。




一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：
因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 $I$ 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：

因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：
因為三內角和為 $180^\circ$，所以三頂點附近的區域只能拼出半個圓，也就是 $\frac{1}{2}$ 單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

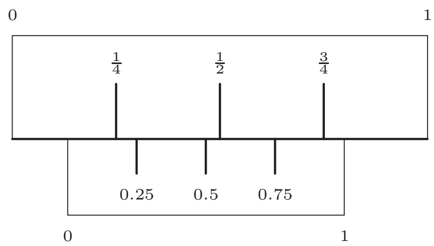
$\boxtimes$

每人心中各有一把尺，但你的尺跟我的尺有共同的交點嗎？讓“幾何相似”這概念來說明吧！

---

題目：(使用幾何相似) 右圖是兩把大小不一樣，但是刻度都是介於 0 與 1 之間的尺，將其刻度的邊任意的對在一起。

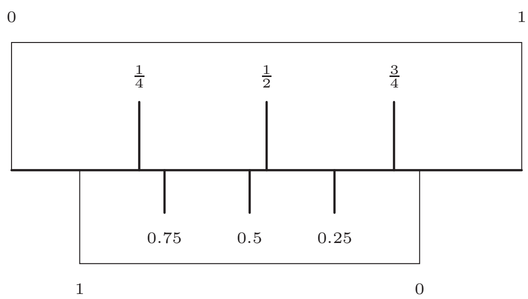
證明大小兩把尺必有一相同的刻度對在一起。




---

在日常生活中，碰到過兩種大小不一的刻度並排或並列嗎？溫度計就是一個例子，它有攝氏及華氏兩種刻度。將上面作法使用在溫度計時，你將發現 $-40$℃ 與 $-40^\circ$F 的刻度是在同一高度上。

**練習 1** 如下圖所示，將小尺調個頭與大尺接觸，是否他們仍會有相同的刻度對在一起。



“蝴蝶效應”相傳是洛倫茲在一次計算中首次偶然發現的。1961 年洛倫茲在進行長期天氣預報的計算，當時在計算中使用了一台現在看來速度太慢的電腦，有一次他在計算中斷後重新開始計算時，把上一次計算的中間資料作為這次計算的初始值輸入電腦，指望在重複給出上次的計算結果後電腦再繼續運行下去。然而出人意料的是計算結果只在開始的一小段與原來結果偏差很小，之後偏差越來越大以致得到完全相反的結果。洛倫茲意識到問題出在他輸入資料的精度上。因為電腦能以六位元小數運行，這次存儲下的是：0.606127，而印表機僅列印了前三位元數位：0.606。這次他是以這個三位小數作為重新計算的初始值，忽略掉了尾數 0.000127。洛倫茲認為造成重大偏差的原因就是忽略掉了這點尾數，由此他認定這個方程對初始值具有高度的敏感性。洛倫茲將這一現象形象地比喻為“蝴蝶效應”，意思是說一隻蝴蝶扇動翅膀所引起的氣流擾動會發展成一場“巨大風暴”。

“蝴蝶效應”是“混沌數學”可以解釋的一種現象。什麼是“混沌數學”呢？它是由多項式、三角函數等這些基本函數迭代而成的複雜數學，現在就讓我們來計算一道拋物線所產生的“混沌數學”：

---

題目： (使用一次因式檢驗法)

如右圖所示：拋物線

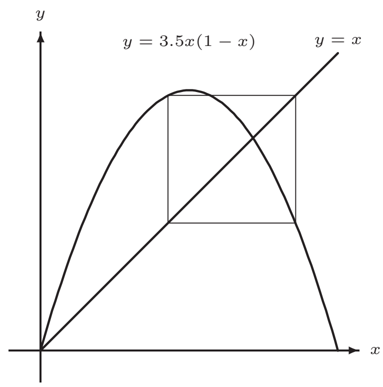
$$y = 3.5x(1-x)$$

與直線

$$y = x$$

上各取兩個相異點，使它們成為正方形。

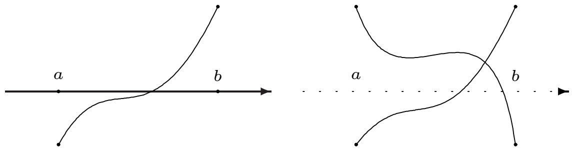
求拋物線上取的點坐標為何？




---

「勘根定理」是說「當 $f(a)f(b) < 0$ 時，$f(x) = 0$ 有一介於 $a$ 與 $b$ 之間的實數根。」其實比較好的講法是「從 $x = a$ 畫到 $x = b$ 的兩條曲線，如果在 $x = a$ 時，第一條在第二條的上方，而

在 $x=b$ 時，第二條在第一條的上方，那麼這兩條曲線必定在中途相遇過。」




在「勘根定理」中使用的兩條曲線就是 $y=f(x)$ 與 $x$ 軸。

---

題目： (使用勘根定理的概念) 和尚每逢週末都有兩天的朝聖之旅。週六的早上八點，準時從山腳下的入口處山發，傍晚五點準時到達山頂的寺廟；週日則是早上八點，準時從寺廟出發，走昨天經過的路，並準時於傍晚五點返回山腳的入口處。

在這兩天的朝聖行程裡，會有某個時刻，他們剛好在同一個地點。

---

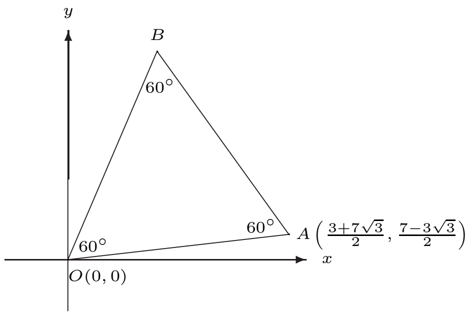
日常生活中，“勘根定理”這個概念經常被使用，只是你沒有發覺而已，例如早上你搭客運從台北到高雄，而同時你的友人從高雄也搭客運來台北。雖然兩人不可能聚在一起，但是某個時刻，你們在路上肯定是相遇過的。又如颱風有颱風眼，微笑會有酒窩，頭髮會有旋轉中心，這些都是球面上“勘根定理”的例子。

---

題目： (使用隸美弗定理)

在右圖中，三角形 $OAB$ 是坐標平面上的正三角形，且 $O=(0,0)$，

$$A=\left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2},\frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right).$$

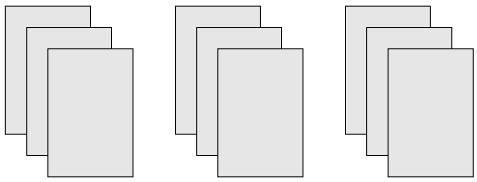



試求 $B$ 點的坐標。

---

---

題目： (使用未知數) 老師背對著學生，讓學生按下列四個步驟操作：



① 分發左、中、右三堆牌，每堆牌不少於兩張，且各堆牌現有的張數一樣；

② 從左邊一堆拿出兩張，放入中間一堆；

③ 從右邊一堆拿出一張，放入中間一堆；

④ 左邊一堆有幾張牌，就從中間一堆拿幾張牌放入左邊一堆。

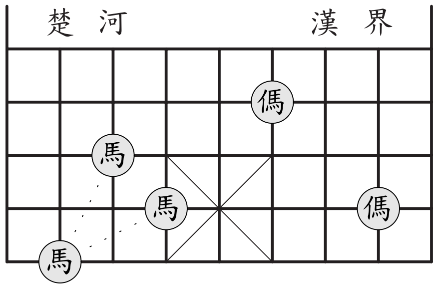
這時老師準確說出了中間一堆牌現有的張數，你認為奧妙在哪呢？

---

象棋是中國的國粹，「馬後炮」、「兵貴神速」、「世事如棋局，不著的才是高手，人生似瓦罐，打破了方見真空」是象棋裡的術語，把象棋當成遊戲，趣味性很高；視為體育競賽，娛樂性很強；把它看成人生縮影，世事人生一局棋，這就是象棋的三重境界。

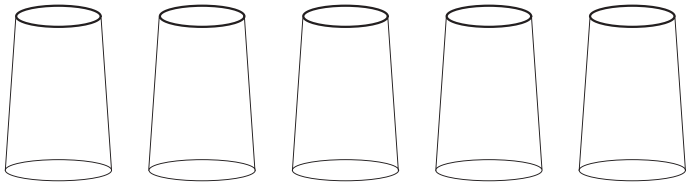
---

題目： (使用向量的概念) 中國象棋棋盤中蘊含著直角坐標系，如右圖所示是棋盤的半邊江山，棋子「馬」與「傌」走的規則是沿「日」形的對角線走，例如圖中馬的位置可以沿虛線走到另兩個馬的位置。請按「馬」與「傌」走的規則，將圖中的「傌」移動至另一個「傌」的位置。

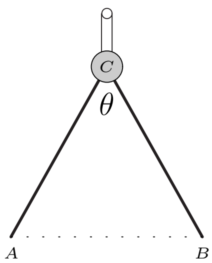



---

練習 2 (使用 $+1$ 與 $-1$ 的概念) 桌上有五只茶杯，杯口都朝下，每次運動只能將兩只茶杯翻轉。請問有辦法在若干次運動之後，讓所有的茶杯杯口都朝上嗎？



練習 3 (使用面積公式) 如下圖所示，圓規的柄長 $CA = CB = 8$，當圓規張開的張角為 $\theta$ 時，會圍出一個三角形 $ABC$。問：當 $\theta$ 為何值時，三角形 $ABC$ 的面積最大，是多少？




練習 4 (使用餘弦定理) 已知三角形 $ABC$ 的邊長 $AB = c, BC = a, CA = b$ 及 $\angle BCA = 30^\circ$，證明 $a, b, c$ 不可能全為正整數。

練習 5 (使用行列式) 已知兩位數 $a_1a_2$ 與 $b_1b_2$ 都是 7 的倍數，證明

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

也是 7 的倍數。

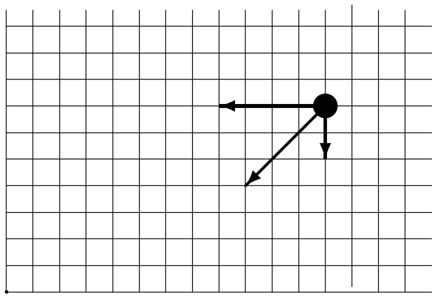
每當數學概念被引入真實的世界裡，數學概念被使用在日常生活中，數學概念被運用在各式各樣的研究時，我們是愉快的，美滿的，也是幸福的，因為此時，人才是主人，數學只是工具，是人在使用數學；但是，當你為了考試在背誦數學概念與公式時，在做很多無聊的習題時，在接受補習老師的應試密技時，一定是不愉快的，因為此時，數學變成主人，你反倒成為數學的奴隸，你被數學所使用了。當你花了大半輩子的時間努力賺錢，為的只是存簿上的數字大一點時，你也是被數學所使用了。我們應該學習「使用數學，不要被數學所使用」，同時應要學習「使用錢，不要被錢所使用」。

## 2　一子棋的誘惑

古老的池塘，
青蛙跳入，
噗通！
在這個古老池塘中有一個又一個的漣漪，它們是一個又一個的同心圓，這些圓是完整的，也是完美的。只有圓才能夠了解完美，古希臘的畢達哥拉斯知道，義大利的詩人但丁也清楚：

---

題目：（一子棋遊戲）下圖是圍棋棋盤，一子棋是兩人玩的遊戲，甲先把一粒黑棋任意的擺放在棋盤的兩線交點上，擺好後，乙決定誰是先玩者，誰是後玩者。



遊戲規則如下：

① 先玩者與後玩者依序輪流移動黑棋。

② 可以向下，向左或向對角線方向移動任意格（如圖所示）。

③ 將黑棋移至左下頂點者贏。

對這樣的遊戲，贏的策略是什麼呢？

---

事實上，“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：早期到美國討生活的華僑勞工，很多都從事鐵路工人，他們趁著休息時刻，經常玩“拈”這道遊戲，它的遊戲規則是這樣的：

(1) 先玩者與後玩者依序輪流拿取兩堆預先給定的石頭。

(2) 可以從兩堆中的任一堆拿取任意顆的石頭或者同時從兩堆裡拿取石頭，但是拿取的個數必須一樣。

(3) 最後將兩堆石頭取完者贏。

“一子棋遊戲”那三個條件幾乎是“拈”這三個條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。

## 3 讓 43 跟 57 催眠你

台師大數學系趙文敏教授所著的《寓數學於遊戲》，是我大學期間看過的幾本通俗數學書籍之一。關於《寓數學於遊戲》這本書的內容，我只記得一道遊戲，那是因為教授師大數學系的暑期進修班時，需要比較軟性，又可以消暑解渴的數學教材，數學遊戲大概是最佳的選擇。於是想到那道遊戲，為了增加它的難度，或者說，創新一下，不要拾人牙慧，善用了學數論的專長，將那道遊戲稍微修改：

---

題目： 請對方從

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 50$$

裡想一個數（不要說出想的數），再從

$$43, \quad 57$$

這兩個數任選一個數（不要說出選的數）。現在將「想的數」與「選的數」相乘，你只需告訴我乘積的末兩位數，我就可以快速的猜出你「想的數」與「選的數」各為何？

舉例來說，當你「想的數」為 38，「選的數」為 43 時，因為 $38 \times 43 = 1634$ 的末兩位數為 34，所以只需告訴我 34，我就可以準確的說出「想的數」 38 與「選的數」 43 這兩個數。

試問這遊戲的奧秘為何？

---

數學遊戲就是用數學騙人的魔術，都是有破綻，可以用數學加以破解的。以這道遊戲為例，想的數共有 50 個，選的數有 2 個，這樣的搭配一共有

$$50 \times 2 = 100$$

種。但是，乘積的末兩位數從 00 到 99 也有 100 種，所以找到一種對應規律是可以理解的。數學玩家希望的規律當然是易懂、易記，也亦操作的數學規則，最重要的是「這個規則必須不容易被拆穿與識破」。

練習 **6** 如果對方告訴你“乘積的末兩位數為 38”，那麼他「想的數」與「選的數」各為何？

## 4　突破貝蒙障礙的奇人

《數學解題》這門課大概是要教授類似波里雅《如何解題》那本書的內容，讓學生思考些既靈活、又有趣一點的問題是必須的。剛教授這門課的前幾年，我都會舉一道〈國王的煩惱〉的數學遊戲讓學生動動腦。這道遊戲是這樣說的：

題目：　在 $7 \times 7$ 的棋盤上（共有 49 個方格）。當一位國王站在某一個格子內時，以此格子為中心的平行、垂直及兩條對角線上的格子都是此國王管轄的範圍。請問：至少需要幾位國王，才有辦法管轄整個棋盤（注意：非國王所在的方格可以由兩個以上的國王共管，但是國王所在的方格不能由兩個以上的國王共管，也就是王不見王的意思）。例如下圖是三個國王管轄 $4 \times 4$ 棋盤的情形：