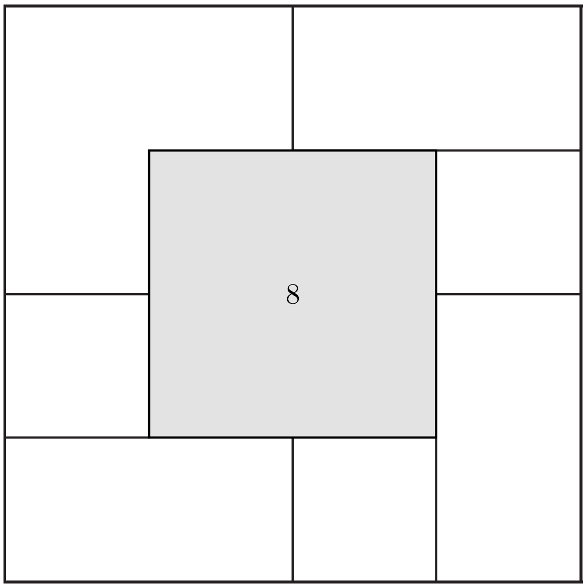
數學也可以這麼說

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 25, 2004



八個全等的正方形一個放在另一個的上邊。如果數字 8 的正方形是最後放的，試確定其它 7 個正方形安放的順序，使得最終結果看上去像圖上那樣排列。

目 錄

1 數學遊戲的第一堂課

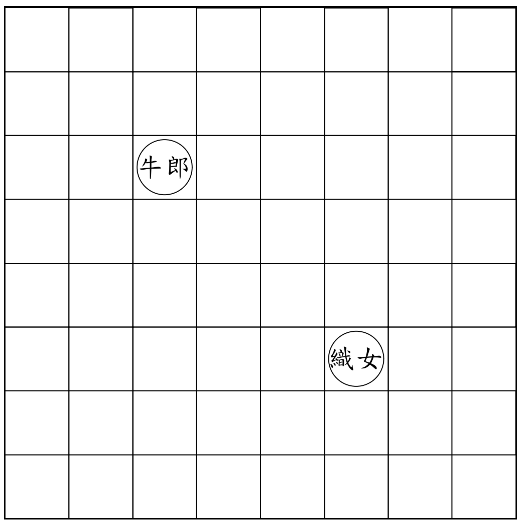
數學經文

是與非，對與錯，黑與白，輸與贏是存在理性頭腦裡的兩端，就像銅板的正面與反面一樣。人的頭腦就在這樣的兩極擺盪，很難止於中間。當停止於中間的時刻發生時，一種清涼的瞥見就顯現了，但它依然只是一種可有可無的瞥見。

數學符號 ○ 與 ×，+1 與 –1，數字的奇數與偶數，跟黑與白一樣，都是文明的語言，也是頭腦的語言，所有受過邏輯訓練的人，都用這些符號來思考。當我們把心情與頭腦放鬆，超然、不做判斷的站在中線，且無時無刻的觀察這兩端所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。

題目： 牛郎必須找到一條通向織女的道路，在抵達織女之前，他必須通過所有的格子各一次，而且僅能採取上、下、左、右的移動方式。

牛郎如何辦到呢？



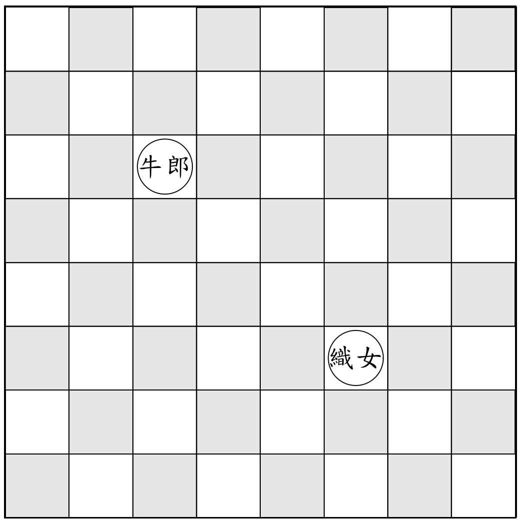
每一種活動都有學習它的第一堂課，例如理財有《理財的第一堂課》，修行有《修行的第一堂課》，上學有《開學的第一堂課

》，跳舞有《跳舞的第一堂課》。“入門”跟“第一堂課”是有相當差別的，入門是指基礎的訓練，從零開始的學習；而第一堂課則是告訴你這整個歷程的精髓在哪兒。所以第一堂課常常也是最後一堂課，因為重點都已經隱含在第一堂課的內容裡了，剩下的只是領悟與不斷的練習。一位好的老師或優秀的同學應該秉持著“入門” 就是“第一堂課”，“第一堂課”就是“最後一堂課”的學習與教學的精神，這樣才能帶領你到那清涼的境界。

「旁觀者清、當局者迷」是棋藝遊戲的至理名言。在數學遊戲裡，當旁觀者，中立的第三者是至為重要的。當你想成那個玩的人，你就跟先玩者或後玩者有了認同，就容易陷入當局者迷的囚牢裡。所以跳脫出玩的人，而當超然、不做判斷的旁觀者，且無時無刻的觀察先玩者與後玩者出手後所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。現在就讓我們進入數學遊戲的第一堂課：

1.1 人生是彩色的，但頭腦卻是黑白的…思考黑、白相間的棋盤

西洋棋的棋盤就是由黑白兩種顏色的方格相間而成的棋盤。讓我們將這道遊戲的棋盤塗成西洋棋的棋盤形式：



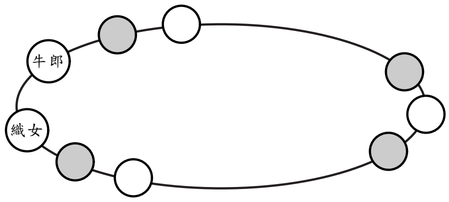
棋盤上有 32 塊黑色方格與 32 塊白色方格，牛郎與織女都站在白色方格上。

1.2 串起黑、白兩色的念珠

牛郎從自己所在的白色方格出發，因為白色方格的上、下、左、

右都是黑色方格，所以牛郎的下一站肯定是黑色方格，再下一站又回到白色方格，⋯，如此白、黑方格交錯出現，最後走到織女所在的白色方格。

如果將白色方格想成白色念珠，黑色方格當成黑色念珠，那麼牛郎依序走過的黑、白方格所串起的黑、白念珠將是如下的形狀：

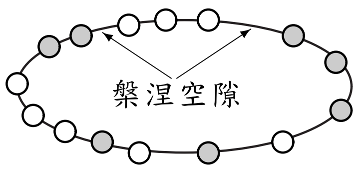


仔細瞧瞧這串黑、白兩色相間的念珠，在牛郎與織女的位置卻是同樣的白色，其餘的位置都是黑、白兩色相間。顯然這串念珠的白色比黑色念珠多一粒，但這與白，黑色念珠都是 32 粒不合。因此，牛郎是不可能找到通往織女的路徑。 ⊠

1.3 再一次的接受考驗

如果你能讀到這裡，且有所得，那很好。接下來給一則心靈與理性頭腦都受用的啟示：「每個人的腦中儲存了很多思想，每個思想就像一粒念珠，而思考就像線，有正向思考的人會拋棄沒用的念珠，而將有用的念珠用那條看不見的線串在一起。」

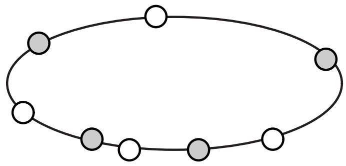
例題 **1** 如下圖所示，它是由七粒黑色珠子與八粒白兩色珠子所串起的念珠：



黑、白或白、黑念珠間的空隙稱為“槃涅空隙”。

給任意的黑、白兩色珠子（個數可以不一樣），無論以何種方式串起念珠，都會有偶數個槃涅空隙。

〔解〕因為黑色與黑色珠子間的空隙及白色與白色珠子間的空隙不是“槃涅空隙”，所以可以將相鄰的黑色珠子綁在一起，視為一粒黑色珠子，也將相鄰的白色珠子綁在一起，視為一粒白色珠子。以上圖為例，經過整理之後變成黑、白相間的一串念珠：



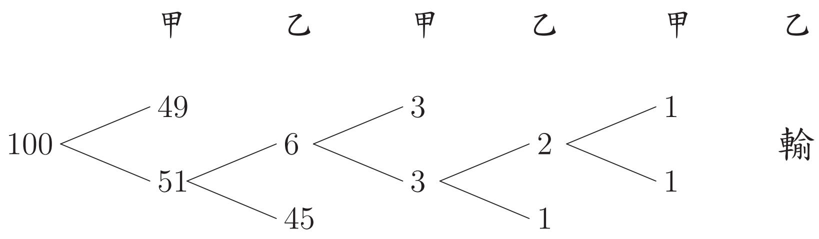
因為念珠黑、白相間，而且偶數個，所以產生偶數個“槃涅空隙”（槃涅空隙等於黑、白念珠的總數）。 ⊠

有了這經驗之後，請完成中興大學的推甄試題：

練習 **1** 在線段 AB 的兩端之間任意取 n 個點，則 AB 被分割成 $n+1$ 小段。將這 n 點任意標示為 A 或 B，如圖所示。試證在這 $n+1$ 小段中，被標示為 AB 或 BA 的小段共有奇數個。

1.4 對折數進行觀察

甲、乙兩人輪流拆數字，規則如下：甲先將 100 拆成兩個正整數的和，接下來乙從這兩個數字中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和；接著甲再從乙拆的兩數中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和，⋯，一直繼續下去，直到有一方無法拆數，遊戲才停止。無法拆數的人輸。下圖是甲、乙兩人輪流拆數字的一個流程圖：



這流程圖代表的拆數過程為

① 甲將 100 拆成 49 與 51 的和；
② 乙選取 51，並將它拆成 6 與 45 的和；
③ 甲選取 6，並將它拆成 3 與 3 的和；
④ 乙選取 3，並將它拆成 1 與 2 的和；
⑤ 甲選取 2，並將它拆成 1 與 1 的和；
⑥ 乙僅能選取 1，但此時已不能拆了，故乙輸。

這道拆數遊戲在有限步驟下一定可以玩完，而且不會雙方平手。像這樣的遊戲常常是不公平的遊戲，也就是說，不是先玩者就是後玩者有必勝的策略，而這必勝的策略經常是需要用數學來呈現的：

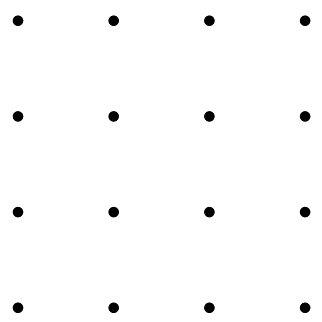
練習 **2** 找個對手一起玩，並思索到底是先玩者或者是後玩者有必勝的策略，又此必勝策略為何？

1.5 可怕的對稱…捨就是得的考驗

雖然「對稱」是很優美且容易的概念，但是「對稱」使用得當的話，它的威力是無窮且可怕的。就讓我們欣賞幾道與「對稱」沾上邊的數學遊戲，並欣賞「對稱」產生的美學。

流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。

因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且至少有一人佔有比較多的房子，也就是說不會平手。

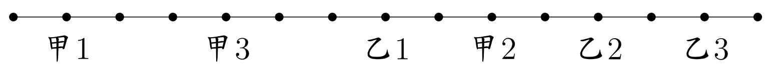


練習 **3** 試問：先畫或者後畫的人有必勝的策略，其策略又是什麼。

再來玩一道遊戲：

練習 **4** 如下圖所示，直線上有 15 個點，甲、乙兩個人輪流每次只能選取一個點（甲先玩、乙後玩），而且每次所新選取的點，不能在之前已選過的點的旁邊。最後當有人不能選取點的時候，那個人就輸了。

例如下圖是甲、乙選點的過程：



甲、乙兩人在經過三輪的選點後，甲已經無法再選點了，故乙贏得這遊戲。

試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

1.6 需要更細微觀察的遊戲

最後我們介紹一道需要細心觀察的遊戲：甲、乙兩人輪流選數字的遊戲，甲先選並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。下表是甲、乙兩人玩這遊戲的過程：

① 甲選 3；剩下數字為 17 ② 乙選 4；剩下數字為 13
③ 甲選 2；剩下數字為 11 ④ 乙選 5；剩下數字為 6
⑤ 甲選 3；剩下數字為 3 ⑥ 乙選 1；剩下數字為 2
⑦ 甲選 2；剩下數字為 0，故甲贏。

20	1	2	3	4	5	剩下數字
甲			●			17
乙				●		13
甲		●				11
乙					●	6
甲			●			3
乙	●					2
甲		●				0（贏）

例題 **2** 試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

〔解〕分析如下：

① 先考慮哪些數字是乙（後玩者）會贏的數字，顯然 $1,2,3,4,5$ 都是甲會贏；你可能以為 6 是乙會贏，其實不對，當甲先選 3 時，乙沒辦法選 3，只能選 1 或 2，故數字 6 還是甲會贏。

② 數字 7 是乙會贏的第一個數字（甲選 $2,3,4,5$ 時，乙選 $5,4,3,2$；但是甲選 1 時，剩下的數字為 6，利用①的方法，乙可選 3 獲勝）。

③ 數字 $8,9,10,11,12$ 是甲會贏的數字（甲分別選取 $1,2,3,4,5$ 時，剩下的數字為 7，由②知道，甲會贏）。

④ 數字 13 是乙會贏的第二個數字。當甲選 $1,2,4,5$ 時，乙選 $5,4,2,1$，此時剩下數字為 7，由②知道乙會贏；當甲選 3 時，剩下數字為 10，乙選 5，此時剩下數字為 5，因為甲不能選 5，故在甲選其餘數字之後，以可以將剩下的數字取完。

⑤ 數字 $14, 15, 16, 17, 18$ 是甲會贏的數字（甲分別選取 $1, 2, 3, 4, 5$ 時，剩下的數字為 13，由④知道，甲會贏）。

⑥ 數字 19 是甲會贏的數字（甲選取 3 時，剩下的數字為 16，此時乙不能選 3，故乙選 $1, 2, 4, 5$ 時，乙選 $2, 1, 5, 4$，剩下的數字為 13 或 7，由④或②知道甲會贏）。

⑦ 數字 20 是乙會贏的第三個數字。當甲選 $2, 3, 4, 5$ 時，乙選 $5, 4, 3, 2$，此時剩下數字為 13，由④知道乙會贏；當甲選 1 時，剩下數字為 19，由⑥知道乙會贏。

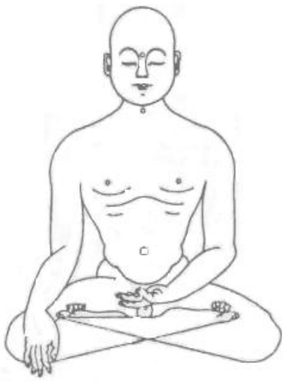
由①②③④⑤⑥⑦的分析得知：在限定數字是 20 的情形下，乙（後玩者）會贏

〔註〕乙（後玩者）會贏的數字依小到大分別為

$$7, 13 = 7+6, 20 = 7+6+7, 26 = 7+6+7+6, 33 = 7+6+7+6+7, \cdots.$$

⊠

2 用格子點串起的面積公式



數學經文

格子點，井然有序地座落在平面上的孤立點，他們沒有輕重之分，也無好壞之別。穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面⋯一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介。

欲瞭解幾何與代數的融合，需時常唸誦華羅庚的名言「數與形，本是相倚依，焉能分作兩邊飛，數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔裂分家萬是非，切莫記，幾何代數統一體，永遠聯繫，切莫分離。」

指考《數學乙》考過如下的填充題：
當平面上的點 (x, y) 之座標 x 與 y 都是整數，稱點 (x, y) 為格子點。數學家知道：座標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式

$$aS + bI + c$$

來表示，其中 S 代表三角形的周長上（三邊邊上）的格子點數，I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數，a, b, c 是固定的常數。求常數 a, b 與 c 的值。

這是有名的皮克公式，只需選定幾個以格子點為頂點的三角形便能求得公式中的常數 a, b 與 c 的值。

題目： (皮克公式) 以格子點為頂點的三角形面積可表為

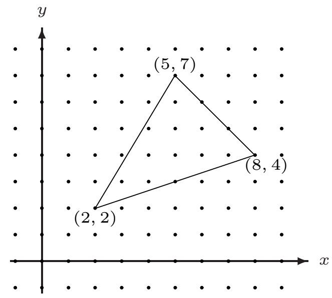
$$\frac{S}{2} + I - 1$$

的形式。

現在讓我們以不同的角度來探索皮克公式！

2.1 井然有序的格子點

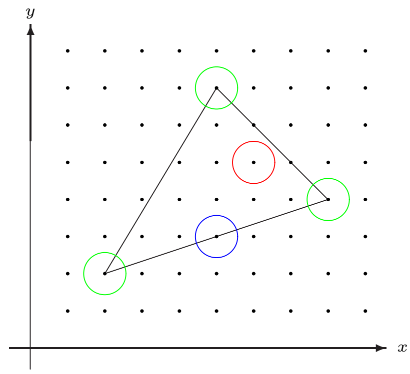
如下圖所示，x 與 y 座標都是整數的點（稱它們為格子點）井然有序的分佈於整個平面上：



觀察以格子點 $(2,2),(5,7),(8,4)$ 為頂點的三角形，內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。內部每個格子點附近的區域都在三角形內；而邊上的格子點中，在邊上但不是頂點的格子點附近幾乎有一半的區域在三角形內部，另一半在外部；但頂點附近，絕大部分的區域都在三角形外部。因此，三角形面積受其內部與邊上的格子點數影響。在下一小節中，我們將精細的討論這影響有多大。

2.2 用格子點串起的念珠⋯皮克公式

在前一小節中，我們將三角形內部或邊上的格子點區分成三類：內部格子點，邊上非頂點格子點與頂點格子點。現在各取一點為圓心，畫圓如下圖所示：



一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：
因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 I 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：
因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：
因為三內角和為 $180°$，所以三頂點附近的區域只能拼出 $\frac{1}{2}$ 單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

$\boxtimes$

從“富有創意的思維”中，是否可以啟發你推導以格子點為頂點的四邊形，五邊形，…，甚至多邊形的面積公式呢？嘗試四邊形的情形看看！

練習 **5** 利用上述方法推導以格子點為頂點的四邊形面積公式（以符號 S, I 表示）。

2.3 師父中的師父

談到三角形的面積公式，不外乎會想到類似

$$\frac{底\times高}{2}, \frac{1}{2}ab\sin\angle C, \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

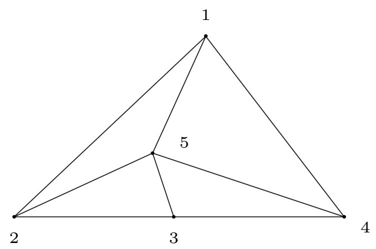
這樣的公式。這幾個面積公式的推導並不困難，而且其證明互有因果關係。不像皮克公式，自成一格，特別是公式中的常數 $\frac{1}{2}, 1, -1$ 充分反應了三角形內部、邊上與頂點這些格子點的份量。將幾何與代數完全融合，這也印證華羅庚說的「…數缺形時少直覺，形少數時難入微…」。皮克以三角形內部、邊上的格子點為珠子，然後用他腦中細微無形的線串出漂亮的「皮克公式」這串念珠。因此，皮克可以說是研究三角形面積公式的“師父中的師父”。

幾何圖形必須透過眼睛來欣賞與觀察，但是沒有耳朵的話，卻無法聆聽她所發出的天籟之音；同樣的，代數式子必須靠靈敏的

耳朵來聆聽，但是沒有眼睛的話，卻無法看到她所呈現的美貌。因此，「沒有幾何的代數是瞎子、沒有代數的幾何是聾子。」對一位眼、耳健全的人，不應輕易放棄她可以同時擁有欣賞與聆聽的本能。

你想當師父中的師父嗎？請完成底下的練習：

練習 6 (稜線定理) 十八世紀盛行的「三角測量」就是將欲丈量的凸多邊形切割成若干個小三角形來一一丈量。如下圖



就是一個三角形被切割成四個小三角形的情形，其中 $1, 2, 3, 4, 5$ 稱之為丈量點，兩丈量點之間的黑線（需丈量的線）稱之為丈量稜線（上圖中恰有 8 條丈量稜線）。

在丈量凸多邊形的所有丈量點數記為 B，內部（不含邊上）的丈量點數記為 I；所需丈量的丈量稜線數記為 S。

根據「三角測量」的經驗法則得知：會有實數 a, b, c 使得式子

$$S = aB + bI + c$$

恆成立。試以幾個實際的圖例求出 a, b, c 的值。

練習 7 (尤拉公式) 承練習 6 的符號，令丈量點與丈量稜線所分割出的三角形總數有 T 個。已知會有實數 a, b, c 使得式子

$$T = aB + bE + c$$

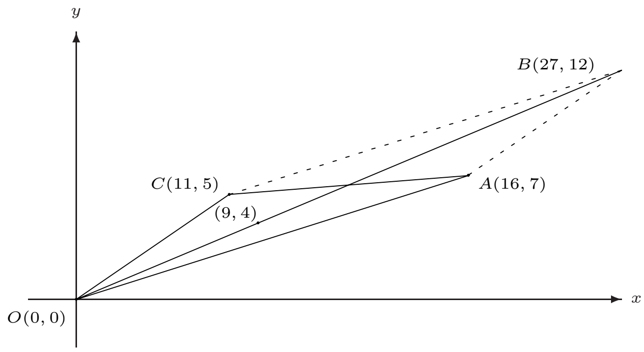
恆成立，試求 a, b, c 的值。

2.4 皮克公式的插曲

大家都很好奇「介於 $\frac{7}{16} < \frac{b}{a} < \frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$ 有無窮多個，究竟分母 a 最小的那個分數是誰呢？」你可曾想過皮克公式對這樣的問題是有幫助的。

請容許我先解釋一下這節中的部分數學經文「⋯穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面⋯一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介⋯。」

通過兩個格子點的直線之斜率剛好是“（兩格子點的 y 座標差）÷（兩格子點的 x 座標差）” 這個有理數。相反的，有理數 $\frac{7}{16}$ 與 $\frac{5}{11}$ 可以想成是通過 $(0,0),(16,7)$ 與通過 $(0,0),(11,5)$ 這兩條直線的斜率。 考慮下圖



① 四邊形 $OABC$ 是一個平行四邊形， B 點座標為

$$(27,12)=(16,7)+(11,5).$$

直線 OB 通過格子點 $(9,4)$，且該直線的斜率為 $\frac{4}{9}$。

② 三角形 OAC 的面積為

$$\frac{1}{2}|11\cdot 7-16\cdot 5|=\frac{3}{2}.$$

③ 三角形 OAC 的邊上格點僅頂點 3 個而已，根據皮克公式知道

$$\frac{3}{2}+I-1=\frac{3}{2}\Rightarrow I=1.$$

因此三角形 OAC 的內部格子點數僅一點，即 $(9,4)$ 是三角形 OAC 內部唯一的格子點。

綜合得到：通過 $(0,0),(9,4)$ 的直線的斜率 $\frac{4}{9}$ 是介於 $\frac{7}{16}<\frac{b}{a}<\frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$，分母 a 最小的那個。故答案為

$$\frac{4}{9}.$$

☒

練習 **8** 考慮底下兩個問題：

(1) 試求以 $(0,0),(8,5),(13,8)$ 為頂點的三角形內部格子點之數目。

(2) 求介於 $\frac{5}{8}$ 與 $\frac{8}{13}$ 之間分母最小的分數。

2.5 宰相肚裡可撐船

這節對皮克三角形面積公式

$$\frac{S}{2}+I-1$$

與練習 6 的稜線定理

$$S=2B+I-3$$

作解釋如下：

① 皮克公式 $\frac{S}{2}+I-1$：
由公式得知，三角形邊上每個格子點的貢獻是 $\frac{1}{2}$；但三角形內部的每個格子點之貢獻是 1。因此，內部格子點數越多的三角形，其面積就越大。

② 稜線定理 $S=2B+I-3$：
此公式說，邊上每設立一丈量點會貢獻出 2 條丈量稜線；但內部每設立一丈量點會貢獻出 3 條丈量稜線。欲使丈量稜線越少，應儘可能將丈量點設在邊上，不要設在內部。也就是說，內部丈量點越多的多邊形，其丈量稜線就越多。

2.6 廓庵十牛圖的啟示

從畢達哥拉斯的畢氏定理，將直角三角形與代數 $c^2=a^2+b^2$ 相連結，皮克公式，將格子點三角形面積與代數 $\frac{S}{2}+I-1$ 相連繫，到稜線定理，將多邊形與代數 $S=2B+I-3$ 相銜接，都讓華羅庚

的名言「數缺形時少直覺，形少數時難入微」餘音繞樑，三月不止。這樣的例子不僅數學上有，其它領域也不遑多讓。在十二世紀時，宋朝廓庵禪師對修行、求法的過程作了前無古人，後無來者的妙喻，且讓我們接受他的點化吧！

《十牛圖》最初有八幅畫，不是十幅，它們不是佛教的，是道教的。它們的起始不詳，沒有人知道它們是怎麼開始的，誰畫出了第一幅牛圖。但在十二世紀，宋朝廓庵禪師把它們重畫了一遍，不僅如此，他還增加了兩幅畫，八幅變成了十幅。這十圖分別為一、尋牛，二、見跡，三、見牛，四、得牛，五、牧牛，六、騎牛歸家，七、忘牛存人，八、人牛俱忘，九、返本還源，十、入廛垂手。

廓庵畫《十牛圖》的目的，是為了探尋“禪宗的修行、求法”這不可表達的內在旅程作出獨特的嘗試。但他畫了《十牛圖》後並不滿足，於是他寫了詩來補充，作為附錄。首先他畫了這十幅圖畫；覺得不滿意，他寫了十首小詩，畫中缺了什麼，他就嘗試在詩歌中補充它們。他還是覺得不滿意。於是他又寫了十篇散文注釋。我知道他一定仍然覺得不滿意，但沒有什麼可做了。真實是博大的，表達是有限的，但他盡了最大的努力。

對修行者來說：「圖畫是無意識的語言，它是視覺化的語言；文字是有意識的語言，它是頭腦裡的語言；而詩歌是潛意識的語言，它是溝通圖與文字的橋樑。」圖、詩歌與文字都無法完全描述修行、求法的全部，但圖可以無限想像，可以給點暗示，詩歌與文字可以補充說明，兩者對內在旅程的探尋不無小補；但對數學家來說：「幾何是欣賞的語言，它是視覺化的語言；而代數是聆聽的語言，它是思考化的語言。」幾何圖形永遠無法十分精確，但提供無限的想像與漣漪，代數式子很難有浪漫的聯想，但提供慎密的解釋；因此幾何與代數的互補性足以刻畫科學的現象與性質。

在此提供《十牛圖》的幾個圖供參考，值得注意的是第八圖是個空圖，就是“空無”的意思。

第一圖：尋牛

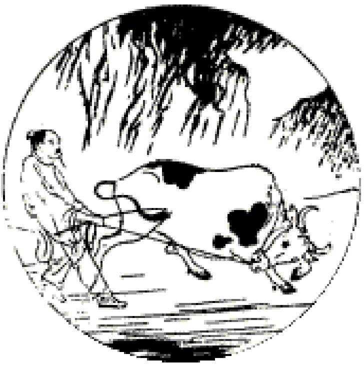
忙忙撥草去追尋，
水闊山遙路更深。
力盡神疲無處覓，
但聞楓樹晚蟬吟。

第二圖：見跡

水邊林下跡偏多，
芳草離披見也麼，
縱是深山更深處，
遼天鼻孔怎藏他?

第三圖：見牛

黃鶯枝上一聲聲，
日暖風和岸柳青，
只此更無回避處，
森森頭角畫難成。



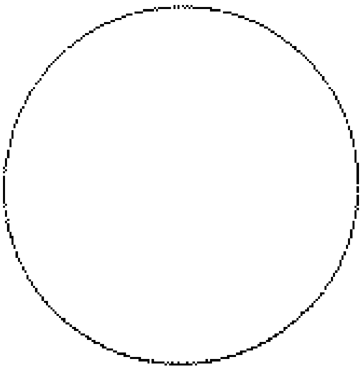
第四圖：得牛

竭盡精神獲得渠，
心強力壯卒難除，
有時才到高原上，
又入煙雲深處居。

第五圖：牧牛
鞭索時時不離身，
恐伊縱步入埃塵，
相將牧得純和也，
羈鎖無拘自逐人。

第六圖：騎牛歸家
騎牛迤邐欲還家，
羌笛聲聲送晚霞。
一拍一歌無限意，
知音何必鼓唇牙。

第七圖：忘牛存人
騎牛已得到家山，
牛也空兮人也閑，
紅日三竿猶作夢，
鞭繩空頓草堂間。



第八圖：人牛俱忘
鞭索人牛盡屬空，
碧天廖廓信難通。
紅爐焰上爭熔雪，
到此方能合祖宗。

第九圖：返本還源
返本還源已費功，
爭如直下若盲聾，
庵中不見庵前物，
水自茫茫花自紅。

第十圖：入塵垂手
露胸跣足入塵來，
抹土涂灰笑滿腮。
不用神仙真秘訣，
直教枯木放花開。

2.7 途徑雖多，旅人卻少

在這章裡，用了三種不同的語言來描述數學，第一種是意識頭腦裡的語言（白話文），鉅細靡遺的描述了“皮克面積公式及其應用”；第二種是淺意識裡的語言（詩文），寫下模糊中帶有清晰，提示中帶有暗示的“數學經文”；第三種是無意識裡的語言（圖畫），借助廓庵禪師的《十牛圖》讓讀者對數學的學習，帶有“橫看成嶺，側成峰，高底遠近解讀各不同”的風韻，圖畫描述數學可虛擬，可實際，有模糊，有清晰，既提示，又暗示，讓人留下無限的解讀與想像空間。

頭腦清晰的人就可以用白話文這種語言描寫數學，這樣的人可以當老師；作點夢或喝點酒的人才能用詩文般的語言描述數學，就如同華羅庚的詩「數缺形時少直覺，形少數時難入微」一樣，這樣的人足以當師父；發點瘋的人可以用圖畫般的語言描述數學，就如同廓庵禪師用《十牛圖》描述“修行、求法”一樣，這樣的人就是師父中的師父。