目 錄

1 數學遊戲的第一堂課

數學經文

是與非，對與錯，黑與白，輸與贏，愛與恨，情與仇是存在理性頭腦裡的兩端，就像銅板的正面與反面一樣。人的頭腦就在這樣的兩極擺盪，很難止於中間。當停止於中間的時刻發生時，一種清涼的瞥見就顯現了，但它依然只是一種可有可無的瞥見。

數學符號 ○ 與 ×，$+1$ 與 -1，數字的奇數與偶數，跟黑與白一樣，都是文明的語言，也是頭腦的語言，所有受過邏輯訓練的人，都用這些符號來思考。當我們把心情與頭腦放鬆，超然、不做判斷的站在中線，且無時無刻的觀察這兩端所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。

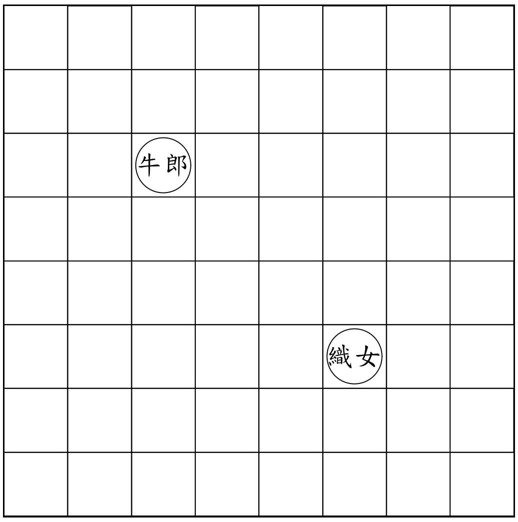
每一種活動都有學習它的第一堂課，例如理財有《理財的第一堂課》，修行有《修行的第一堂課》，上學有《開學的第一堂課》，跳舞有《跳舞的第一堂課》。“入門”跟“第一堂課”是有相當差別的，入門是指基礎的訓練，從零開始的學習；而第一堂課則是告訴你這整個歷程的精髓在哪兒。所以第一堂課常常也是最後一堂課，因為重點都已經隱含在第一堂課的內容裡了，剩下的只是領悟與不斷的練習。一位好的老師或優秀的同學應該秉持著“入門” 就是“第一堂課”，“第一堂課”就是“最後一堂課”的學習與教學的精神，這樣才能帶領你到那清涼的境界。

一道好的數學遊戲就是把嚴肅的數學思想、概念或公式，藏在誘人又容易掌握的外在形式的技巧。這個技巧就是以遊戲的形式來呈現，透過遊戲的過程，達到永生難忘的高度。

現在就讓我們進入本章的題目，也是第一道遊戲：

題目： 牛郎必須找到一條通向織女的道路，在抵達織女所在位置之前，他必須通過所有的格子各一次，而且僅能採取上、下、左、右的移動方式。

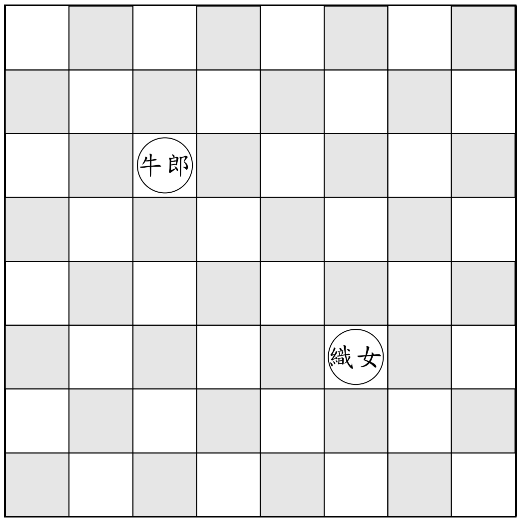
牛郎如何辦到呢？



「旁觀者清、當局者迷」是棋藝遊戲的至理名言。在數學遊戲裡，當旁觀者，也就是中立的第三者，是至為重要的。當你想成為那個玩的人，你就跟先玩者或後玩者有了認同，就容易陷入當局者迷的囚牢裡。所以跳脫出玩的人，而當超然、不做判斷的旁觀者，且無時無刻的觀察先玩者與後玩者出手後所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。現在就讓我們進入數學遊戲的第一堂課：

1.1 人生是彩色的，但頭腦卻是黑白的…思考黑、白相間的棋盤

大家從小到大，無論是親身經驗，電腦螢幕上看到或電視轉播，想必見識過很多種遊戲的棋盤。如中國象棋棋盤，圍棋棋盤，跳棋棋盤，西洋棋棋盤…等，這些棋盤中，又以西洋棋棋盤與眾不同，因為它是由黑、白兩種顏色組成。也就是說，西洋棋的棋盤就是由黑、白兩種顏色的方格相間而成的棋盤。讓我們將這道遊戲的棋盤塗成西洋棋的棋盤形式：

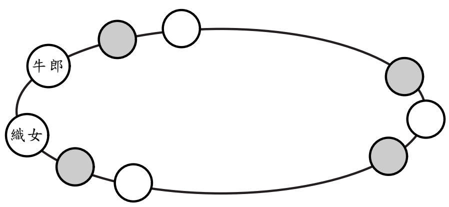


棋盤上有 32 塊黑色方格與 32 塊白色方格，牛郎與織女都站在白色方格上。

1.2 串起黑、白兩色的念珠

牛郎從自己所在的白色方格出發，因為白色方格的上、下、左、右都是黑色方格，所以牛郎的下一站肯定是黑色方格，再下一站又回到白色方格，⋯，如此白、黑方格交錯出現，最後走到織女所在的白色方格。

如果將白色方格想成白色念珠，黑色方格當成黑色念珠，那麼牛郎依序走過的黑、白方格所串起的黑、白念珠將是如下的形狀：

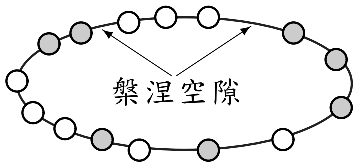


仔細瞧瞧這串黑、白兩色相間的念珠，在牛郎與織女的位置卻是同樣的白色，其餘的位置都是黑、白兩色相間。顯然這串念珠的白色比黑色念珠多一粒，但這與白，黑色念珠都是 32 粒不合。因此，牛郎是不可能找到通往織女所在位置的路徑。 ⊠

1.3 再一次的接受考驗

如果你能讀到這裡，且有所得，那很好。接下來給一則心靈與理性頭腦都受用的啟示：「每個人的腦中儲存了很多思想，每個思想就像一粒念珠，而思考就像線，有正向思考的人會拋棄沒用的念珠，而將有用的念珠用那條看不見的線串在一起。」

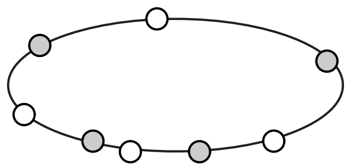
例題 **1** 如下圖所示，它是由七粒黑色珠子與八粒白色珠子所串起的念珠：



黑、白或白、黑念珠間的空隙稱為“槃涅空隙”。

給任意的黑、白兩色珠子（個數可以不一樣），無論以何種方式串起念珠，都會有偶數個槃涅空隙。

〔解〕因為黑色與黑色珠子間的空隙及白色與白色珠子間的空隙不是“槃涅空隙”，所以可以將相鄰的黑色珠子綁在一起，視為一粒黑色珠子，也將相鄰的白色珠子綁在一起，視為一粒白色珠子。以上圖為例，經過整理之後變成黑、白相間的一串念珠：



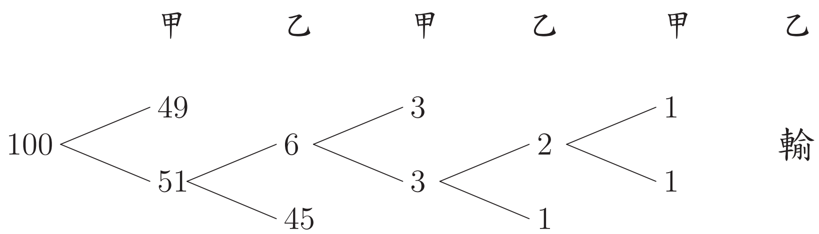
因為念珠黑、白相間，而且偶數個，所以產生偶數個“槃涅空隙”（槃涅空隙等於黑、白念珠的總數）。 ⊠

有了這經驗之後，請完成中興大學的推甄試題：

練習 **1** 在線段 AB 的兩端之間任意取 n 個點，則 AB 被分割成 $n+1$ 小段。將這 n 點任意標示為 A 或 B，如圖所示。試證在這 $n+1$ 小段中，被標示為 AB 或 BA 的小段共有奇數個。

1.4 對拆數進行觀察

甲、乙兩人輪流拆數字，規則如下：甲先將 100 拆成兩個正整數的和，接下來乙從這兩個數字中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和；接著甲再從乙拆的兩數中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和，⋯，一直繼續下去，直到有一方無法拆數，遊戲才停止。無法拆數的人輸。下圖是甲、乙兩人輪流拆數字的一個流程圖：



這流程圖代表的拆數過程為

① 甲將 100 拆成 49 與 51 的和；
② 乙選取 51，並將它拆成 6 與 45 的和；
③ 甲選取 6，並將它拆成 3 與 3 的和；
④ 乙選取 3，並將它拆成 1 與 2 的和；
⑤ 甲選取 2，並將它拆成 1 與 1 的和；
⑥ 乙僅能選取 1，但此時已不能拆了，故乙輸。

這道拆數遊戲在有限步驟下一定可以玩完，而且不會雙方平手。像這樣的遊戲常常是不公平的遊戲，也就是說，不是先玩者就是後玩者有必勝的策略，而這必勝的策略經常是需要用數學來呈現的：

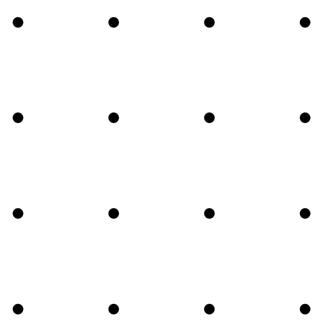
練習 **2** 找個對手一起玩，並思索到底是先玩者或者是後玩者有必勝的策略，而且此必勝策略為何？

1.5 可怕的對稱⋯捨就是得的考驗

雖然「對稱」是很優美且容易的概念，但是「對稱」使用得當的話，它的威力是無窮且可怕的。就讓我們欣賞幾道與「對稱」沾上邊的數學遊戲，並欣賞「對稱」產生的美學。

流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。

因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且一定有一人佔有比較多的房子，也就是說不會平手。

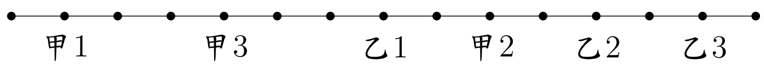


練習 **3** 試問：先畫或者後畫的人有必勝的策略，其策略又是什麼。

再來玩一道遊戲：

練習 **4** 如下圖所示，直線上有 15 個點，甲、乙兩個人輪流每次只能選取一個點（甲先玩、乙後玩），而且每次所新選取的點，不能在之前已選過的點的旁邊。最後當有人不能選取點的時候，那個人就輸了。

例如下圖是甲、乙選點的過程：



甲、乙兩人在經過三輪的選點後，甲已經無法再選點了，故乙贏得這遊戲。

試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

1.6 需要更細微觀察的遊戲

最後我們介紹一道需要細心觀察的遊戲：甲、乙兩人輪流選數字的遊戲，甲先選並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。下表是甲、乙兩人玩這遊戲的過程：

① 甲選 3；剩下數字為 17 ② 乙選 4；剩下數字為 13
③ 甲選 2；剩下數字為 11 ④ 乙選 5；剩下數字為 6
⑤ 甲選 3；剩下數字為 3 ⑥ 乙選 1；剩下數字為 2
⑦ 甲選 2；剩下數字為 0，故甲贏。

20	1	2	3	4	5	剩下數字
甲			●			17
乙				●		13
甲		●				11
乙					●	6
甲			●			3
乙	●					2
甲		●				0（贏）

例題 **2** 試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

〔解〕分析如下：

2 在數線上跳曼波

數學經文

直線是什麼呢？它就像“時間”這問題一樣，時間讓人感覺很平凡，但“時間是什麼？”卻讓人難以回答。養成對直線具有穿透力的洞見是需要的。走直線需要努力與勇氣，現在就讓我們開始！

音樂是由聲音與寧靜所組成的，它不只是聲音，它還包含了寧靜；而直線卻被需要的點與空隙（不需要的點）填滿。抓住需要的點與掌握空隙是探索直線的初步。但唯有領悟出“需要的點其實是不需要的點，不需要的點（空隙）才是需要的點”時，直線才能與你共舞，直線的平凡性才會像種子般深植你的腦海裡，時時開花，處處結果。

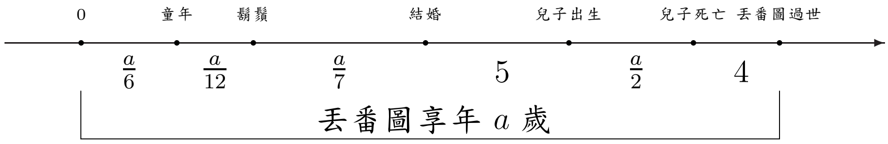
題目： 數學兼哲學家伽利略，於公元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁。出版《對話錄》一書到在獄中過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。

年輕的伽利略發明十倍率的望遠鏡，並在隔年發現木星的第一顆衛星（後人稱為歐羅巴衛星）。發現衛星到接受審判剛好是他被監禁時間的三倍。事實上，發明望遠鏡到出版《對話錄》算是伽利略的黃金歲月，這段時間正好是他發現衛星時年齡的一半。試問：伽利略在哪一年發現歐羅巴衛星？

代數學鼻祖丟番圖的年齡問題「他的生活中，童年佔去六分之一，又過了十二分之一長出鬍鬚，再過了七分之一他結了婚，五年之後生下兒子，但是兒子的壽命只有他的一半，在兒子死後四年，他也過世了。求丟番圖的年齡。」是中學生耳熟能詳的算術問題。

據說聖奧古斯丁曾經說過：“每一個人都知道時間是什麼，我也知道時間是什麼，但是當有人問我：「時間是什麼？請你解釋

給我聽。」那麼我就不知所措了。” 對學數學的人來說，數線是用來描述時間再好不過的工具了。例如：正方向的數線就好像人的年齡成長一樣，凡是走過，必在數線上的某個點留下痕跡。所以數線是用來刻畫與紀錄人生最好不過的線了！現在就讓我們來描繪丟番圖的年齡數線圖：



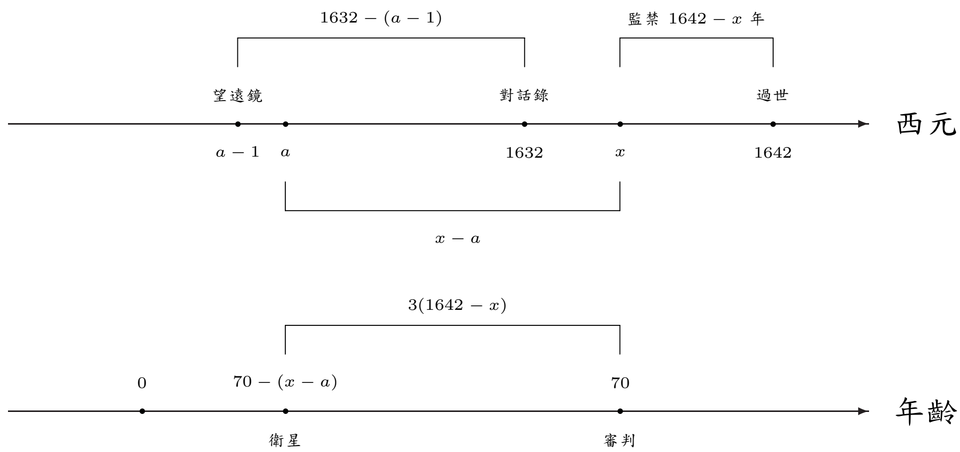
由上述時間對照表得到方程式

$$a=\frac{a}{6}+\frac{a}{12}+\frac{a}{7}+5+\frac{a}{2}+4\Rightarrow a=84.$$

在丟番圖的年齡數線圖中，丟番圖的出生、童年、鬍鬚、結婚、兒子出生、兒子死亡、丟番圖過世這些點是需要的點，而其間的空隙是不需要的點。但是解題所列的方程式中，空隙反而變成重要的點，那些需要的點反而變成不需要的點了。

2.1 讓生命在數線上漫步

本章問題的解答：設伽利略於公元 x 年接受審判，而在公元 a 年發現衛星。將伽利略的年齡與公元的時間這兩條數線繪圖比較如下：



由上述時間對照表得到方程組

$$\begin{cases} 3(1642-x)=(x-a) \\ 1632-(a-1)=\dfrac{70-(x-a)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=a+4926 \\ x=3a-3196 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1634, \\ a=1610. \end{cases}$$

因此伽利略在公元 1610 年發現歐羅巴衛星。 $\boxtimes$

練習 **5** 龍師父對虎徒弟說：「我在你這個年齡時，你只有兩歲；等你到我這個年紀時，我就 41 歲了。」試問龍師父與虎徒弟現年各幾歲？

2.2 遲疾之律，非出神怪，有形可檢，有數可推

祖沖之說：「遲疾之律，非出神怪，有形可檢，有數可推。」大意是說：「天體運行的規律，不是什麼神怪、不可捉摸的東西，而是有形體可供觀察檢驗，且有數據可以計算推測的。」天體（太陽、地球、彗星等）運行是有週期性的，而且可以量化，並用科學方法得到的！

例題 **3** 哈雷在他的好朋友牛頓的協助之下，成功地計算出一顆彗星（就是有名的哈雷彗星）將於 1758 年光臨地球，而且這是它在第十八世紀唯一的一次光臨，同時他們也算出下世紀也僅會光臨一次。已知哈雷彗星的週期 P 剛好是整數年，而且第十八世紀是指西元 1701 年至西元 1800 年。

(1) 根據上述資料推論 $P \geq 72$。

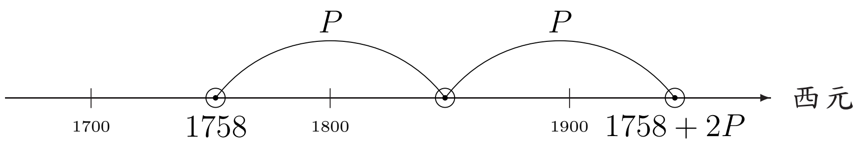
(2) 中國的天文學家，在第十七世紀裡，一共觀測到哈雷彗星光臨地球兩次。試據此推論 $P \leq 78$。

(3) 事實上，中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久，翻開歷史記錄得知：此顆彗星在第十四世紀也是光臨地球兩次；但是在第十一及十二世紀時，哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已。

你是否能根據這些資料，列舉出哪些從 (1) 及 (2) 所得到的 P 值是不合的，並算出哈雷彗星的真正週期？

〔解〕分析如下：

(1) 將彗星出現的數線圖描繪如下：

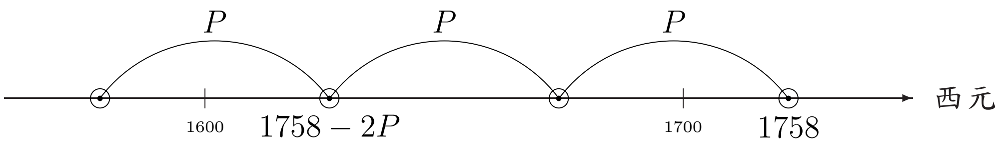


因為下一次出現落在 1801 年至 1900 年之間，再次出現是 1901 年以後的事了。由此推得不等式

$$1758+2P \geq 1901 \Rightarrow P \geq 71.5.$$

因為週期 P 是個正整數，所以 $P \geq 72$。

(2) 將彗星出現的數線圖描繪如下：



因為上兩次出現落在 1601 年至 1700 年之間，再上次出現是 1600 年以前的事了。由此推得不等式

$$1758-2P \geq 1601 \Rightarrow P \leq 78.5.$$

因為週期 P 是個正整數，所以 $P \leq 78$。

(3) ①若 $P=72$，則哈雷彗星在 1110 年與 1182 年將兩度光臨第十二世紀（與觀測不符）。
②若 $P=73$，則哈雷彗星在 1101 年與 1174 年將兩度光臨第十一世紀（與觀測不符）。
③若 $P=74$，則哈雷彗星在 1018 年與 1092 年將兩度光臨第

十一世紀（與觀測不符）。

④若 $P=75$，則哈雷彗星在 1008 年與 1083 年將兩度光臨第十一世紀（與觀測不符）。

⑤若 $P=77$，則哈雷彗星在第十四世紀僅光臨地球一次（在 1373 年），與觀測不符。

⑥若 $P=78$，則哈雷彗星在第十四世紀僅光臨地球一次（在 1368 年），與觀測不符。

⑦若 $P=76$，則哈雷彗星光臨地球的次數與觀測的相符。

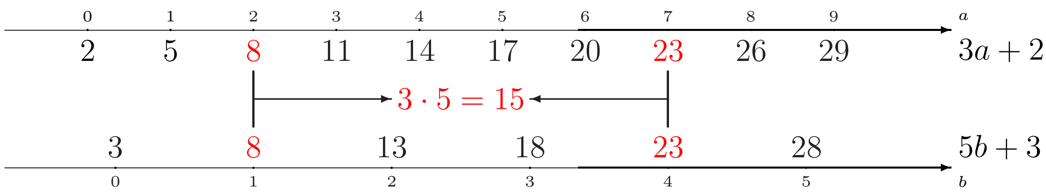
綜合得到，哈雷彗星的週期為 76 年。

⊠

2.3 剩餘定理在中學的餘暉⋯研究那不可研究的空隙

「今有物不知其數，三三數之剩二；五五數之剩三；七七數之剩二。問物幾何？」是《孫子算經》的“物不知數”問題，用現代語言就是，“現有一堆東西不知多少，被 3 除餘 2；被 5 除餘 3；被 7 除餘 2。問這些東西有多少？”。

被 3 除餘 2 的整數可以表成 $3a+2$ 的型式；同樣的，被 5 除餘 3 的整數可以表成 $5b+3$ 的形式。如何求這兩個式子的共同項呢？讓我們用數線來解釋吧！



從兩條數線得知，第一個共同項是 8，而下一個共同項與 8 的差必須是 3 與 5 的最小公倍數（因為第一條數線的點每次跳 3，第二條數線的點每次跳 5），又 3 與 5 的最小公倍數是 15，所以第二個共同項為 $8+15$，⋯。依此得到：$3a+2$ 與 $5b+3$ 的共同項為

$$8,23=8+15,38=23+15,53=38+15,\cdots,$$

即被 3 除餘 2 與被 5 除餘 3 的共同數可以整合成「被 15 除餘 8 的數」。

"物不知其數"的問題剩下的工作就是求被 15 除餘 8 與被 7 除餘 2 的共同數。仿前一段的方法

① 先求出一共同項：
因為"被 15 除餘 8"的數每次跳 15，而"被 7 除餘 2"的數每次只跳 7，所以從"被 15 除餘 8"的數找可以比較快找到共同項，其前幾項為

$$8, 23, 38, \cdots.$$

因為第二項 23 被 7 除餘 2，所以 23 是第一個共同項。

② 寫下前幾個共同項的數：
因為第二個共同項與 23 的差必須是 15 與 7 的最小公倍數，又 15 與 7 的最小公倍數是 105，所以第二個共同項為 $23 + 105 = 128$。因此前幾個共同項的數為

$$23, 128 = 23 + 105, 233 = 128 + 105, \cdots.$$

③ 所有共同項的表示：
由 ② 知道被 15 除餘 8 與被 7 除餘 2 的共同項為「被 105 除餘 23 的數」。

從"物不知其數"的問題得知：被 3 除餘 2；被 5 除餘 3；被 7 除餘 2 的共同數為「被 105 除餘 23 的數」，這裡的 105 是 $3, 5, 7$ 的最小公倍數，而 23 是同時滿足三個條件的最小正整數。

練習 **6** 求被 5 除餘 3 與被 8 除餘 6 的共同數。

練習 **7** 有士兵不滿九百人，每 5 人一數，剩 3 人，每 8 人一數，剩 6 人，每 13 人一數，剩 7 人。問士兵有幾人？

2.4 直線上的空隙

在座標平面上，x 與 y 座標都是整數的點稱為格子點。我們的問題是：如何寫下直線 $13x - 7y + 8 = 0$ 所通過的所有格子點？

如果將直線方程式 $13x-7y+8=0$ 改寫成等式

$$13x+8=7y,$$

那麼“該直線所通過的格子點”就可以解釋成“被 13 除，餘 8 與被 7 除，餘 0 的共同項”了。仿前一節的方法：

① 先求出一共同項：
因為“被 13 除餘 8”的數每次跳 13，而“被 7 除餘 0”的數每次只跳 7，所以從“被 13 除餘 8”的數找可以比較快找到共同項，其前幾項為

$$8,21,34,\cdots.$$

因為第二項 21 被 7 除餘 0，所以 21 是第一個共同項。

② 寫下前幾個共同項的數：
因為第二個共同項與 21 的差必須是 13 與 7 的最小公倍數，又 13 與 7 的最小公倍數是 91，所以第二個共同項為 $21+91=112$。因此前幾個共同項的數為

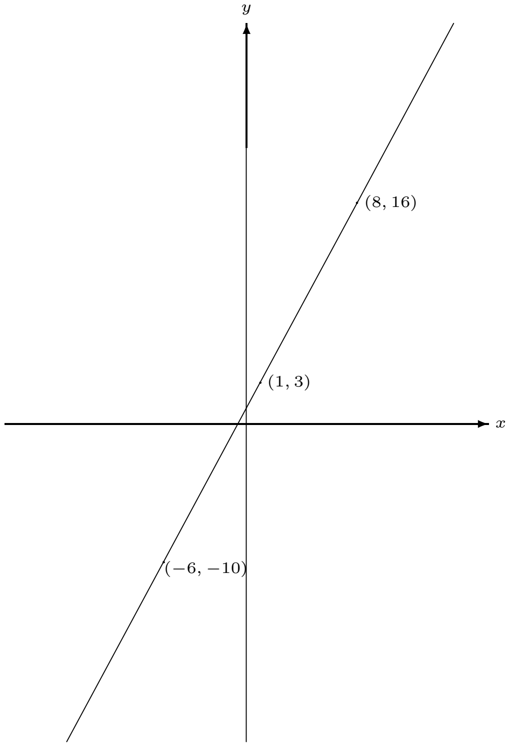
$$21,112=21+91,203=112+91,\cdots.$$

③ 所有共同項的表示：
由 ② 知道被 13 除餘 8 與被 7 除餘 0 的共同項為「被 91 除，餘 21 的數」。

④ 所有格子點的表示法（參數表示法）：
由前述知道，$13x+8$ 與 $7y$ 的共同項就是「被 91 除，餘 21 的數」，亦即 $91t+21$ 的形式（其中 t 為整數）。故直線 $13x-7y+8=0$ 通過的格子點為

$$\begin{cases}13x+8 & =91t+21\\ 7y & =91t+21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7t+1\\ y=13t+3\end{cases}\quad(t\text{ 是整數})。$$

我們把直線 $13x-7y+8=0$ 畫在下圖中，通過的格子點 $(-6,-10),(1,3)$ 與 $(8,16)$ 分別對應到 $t=-1,0$ 與 1 的情形：



練習 **8** 求直線 $11x-9y=7$ 所通過的所有格子點。

2.5 等你來瞭解的尤拉分割數列

將 4 表示成正整數的和有多少個方式呢?讓我們列舉看看吧!

$$1+1+1+1,\ \ 1+1+2,\ \ 1+3,\ \ 2+2,\ \ 4$$

不考慮次序的話,一共有上述五種不同方式。同樣,將 5 表示成正整數的和一共有

$$1+1+1+1+1,\ \ 1+1+1+2,\ \ 1+1+3,\ \ 1+4,\ \ 1+2+2,\ \ 2+3,\ \ 5$$

等七種不同方式。

練習 **9** 試問將 6 表示成正整數的和有多少不同的表示法(不考慮次序)?

為了方便,定義 $P(n)$ 為“將 n 表示成正整數和(不考慮次序)的方法數”,例如 $P(4)=5, P(5)=7$。

有關分割數列 $\langle P(n)\rangle$，尤拉計算了 $P(1), P(2), P(3), \cdots, P(69)$ 這 69 個值，在 1890 年，MacMahon 計算到 $P(200)$ 得到

$$P(200) = 3972999029388.$$

數列 $\langle P(n)\rangle$ 的值隨著 n 的增大，$P(n)$ 快速成長。計算前幾項意義不大，洞察 $P(n)$ 的關係才是研究它的重點。第一位對 $P(n)$ 提出洞見性觀察的是印度數學家拉馬奴姜。他發現"當 n 除以 5 餘 4 時， $P(n)$ 是 5 的倍數；當 n 除以 7 餘 5 時，$P(n)$ 是 7 的倍數；當 n 除以 11 餘 6 時， $P(n)$ 是 11 的倍數"，也就是說

定理 1 (拉馬奴姜定理)

$$5|P(5a+4),\quad 7|P(7b+5),\quad 11|P(11c+6).$$

有了拉馬奴姜定理之後，對 $P(n)$ 的值，有更多的結果：

例題 4 哪些 n 會使 $P(n)$ 是 35 的倍數。

〔解〕當 n 除以 5 餘 4，除以 7 餘 5 時，$P(n)$ 會是 5 與 7 的倍數，即 $P(n)$ 是 35 的倍數。所以除以 5 餘 4，除以 7 餘 5 的正整數 n 是所要的答案。現在利用前一節的方法求這些 n：

① 先求出一共同項：
因為"被 7 除餘 5"的數每次跳 7，而"被 5 除餘 4"的數每次只跳 5，所以從"被 7 除餘 5"的數找可以比較快找到共同項，其前幾項為

$$5, 12, 19, \cdots.$$

因為第三項 19 被 5 除餘 4，所以 19 是第一個共同項。

② 寫下前幾個共同項的數：
因為第二共同項與 19 的差必須是 5 與 7 的最小公倍數，又 5 與 7 的最小公倍數是 35，所以第二共同項為 $19+35=54$。因此前幾個共同項的數為

$$19, 54 = 19+35, 89 = 54+35, \cdots.$$

③ 所有共同項的表示：

由 ② 知道被 5 除餘 4 與被 7 除餘 5 的共同項為「被 35 除餘 19 的數」。

因為除以 5 餘 4，除以 7 餘 5 的正整數 n 被 35 除餘 19，且此時的 n 滿足 $35|P(n)$，所以 $35|P(35k+19)$，也就是說，被 35 除餘 19 的 n 會使 $P(n)$ 是 35 的倍數。 ⊠

練習 **10** 哪些 n 會使 $P(n)$ 是 77 的倍數。

練習 **11** 哪些 n 會使 $P(n)$ 是 385 的倍數。

2.6 尤拉五角形公式

尤拉數列 $P(n)$ 是否可以用比較小的數

$$P(n-1), P(n-2), \cdots, P(2), P(1)$$

來表示呢？答案是可以的，不過表示法比較複雜。這個複雜的表示公式稱為尤拉五角形公式，它跟五邊形數列 $\left\langle \frac{k(3k+1)}{2} \right\rangle$ 有關，讓我們來欣賞它吧！

將 $\frac{k(3k\pm1)}{2}$（k 為正整數）的數依小到大列出如下：

$$1,\ \ 2,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 12,\ \ 15, \cdots.$$

尤拉發現分割數列 $\langle P(n) \rangle$ 滿足

$$\begin{aligned} P(n) = & [P(n-1) + P(n-2)] - \\ & [P(n-5) + P(n-7)] + \\ & [P(n-12) + P(n-15)] - \\ & \cdots, \end{aligned}$$

在這公式裡，規定 $P(0) = 1, P(-1) = P(-2) = \cdots = 0$，這是有名的「尤拉五角形公式」。

由 $P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3, P(4)=5, P(5)=7$ 及尤拉五角形公式可推得

$$\begin{aligned}
P(6) &= [P(6-1)+P(6-2)]-[P(6-5)+P(6-7)] \\
&= [P(5)+P(4)]-[P(1)+P(-1)] \\
&= [7+5]-[1+0] \\
&= 11.
\end{aligned}$$

練習 **12** 利用尤拉五角形公式計算 $P(7)$ 與 $P(8)$ 的值。