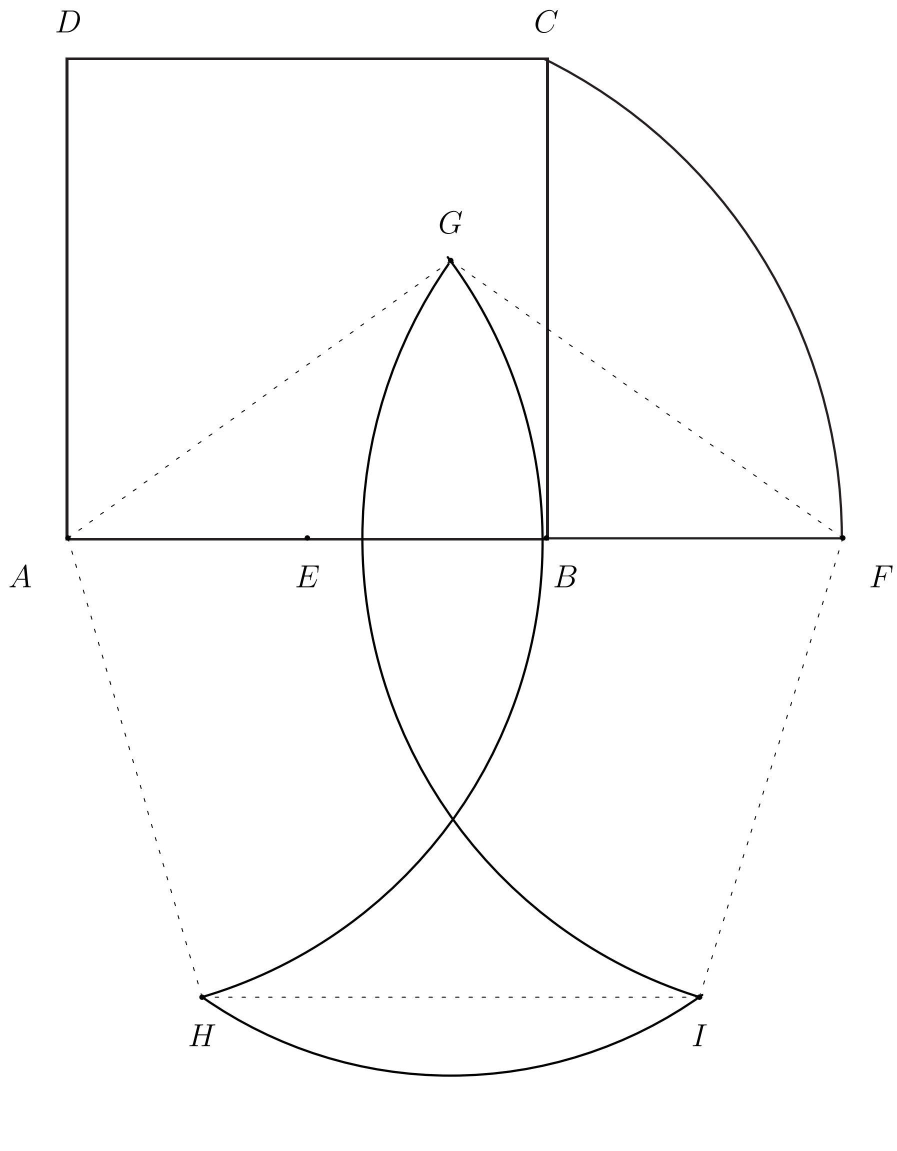
榕 城 數 學 講 義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

May 18, 2005



正五邊形 $AHIFG$ 的尺規作圖

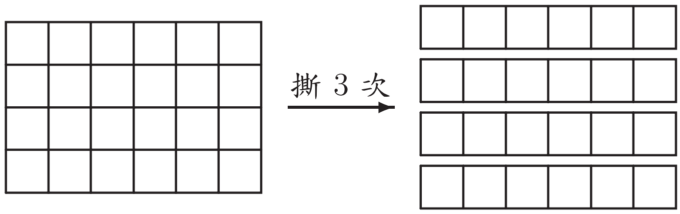
目 錄

1 他山之石可以攻錯⋯撕郵票問題

「有一次筆者到郵局寄信，因為要寄的信很多，服務小姐給了我一大張未撕開的郵票，正當我很有耐心將郵票一張一張撕開的時候，腦中突然浮現一個這樣的問題：怎樣撕才最省時呢？不過，仔細一想便覺得這個問題“不成問題”，因為要把一大張未撕開的郵票一張一張分開，就是要把各郵票之間的“連結線”撕開，而“連結線”的總和是固定的，並不隨撕開的方式而有所改變，因此並不存在特別省時的方法。這時心裡覺得有一點無奈，“但是說不定有某一種撕開的方式所需撕裂次數是最少的？” 一個新的想法又浮現腦海，正是“山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村”，這一問竟為我開啟一趟“撕郵票之旅”。」這是彰師大數學系學生陳美如在《數學傳播季刊》第 93 期上發表的文章〈撕郵票問題〉的前言。我之所以會讀到這篇文章也是陰錯陽差造成的，原本是找尋我在左營高中實習時，指導學生作科展發表在《數學傳播季刊》上的那篇文章，誤以為在這一本上，回家翻開一看才知道拿錯了。只好將錯就錯，看看手上這本期刊有什麼文章。

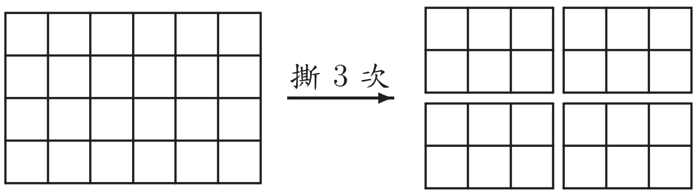
幾年前，彰師大數學系蕭守仁教授經常邀請我去他們的週末班上課，那是開給中部優秀高中生的數學課程。陳美如在那個班做助理的工作，所以知道這個人。我感興趣的是美如竟然能將很平常的「寄信活動」轉變成很有數學思維的「撕郵票之旅」，進而導引出一道有趣的幾何問題。她的問題是這樣的：通常撕開相連的郵票時，會一次把整頁郵票沿某直線撕成兩小頁，稱這樣的撕裂動作為“一次”，例如將一頁 6×4 的郵票撕開成一張張單張郵票至少可以有以下兩種撕法：

(1) 第一種撕法：



然後再把每一排撕 5 次成為一張張單張的郵票，因此共需要撕 $3 + 5 \times 4 = 23$ 次。

(2) 第二種撕法：



再把每一小頁 3×2 郵票撕一次成 3×1 的郵票，最後再逐一撕兩次成單張郵票，因此共需要撕 $3 + (2 \times 2 + 1) \times 4 = 23$ 次。

從這兩種不同的撕法，不難猜到以下意外的結果：

題目： 任何一頁 $m \times n$ 的郵票被完全撕開所需撕裂的次數與撕開的方式無關，且其次數恰為 $mn - 1$ 次。

美如在那篇文章探索比這更複雜的情形，上述問題只是開胃菜，她把證明留給讀者。沒有提供解答或暗示的問題是最漂亮的，因為每個人都可以自由發揮，提出各式各樣的想法，就像蘇東坡的詩所描述的：「橫看成嶺，側成峰，高低遠近不相同」。關於這個問題讓我想起兩件親身經驗的事情，或者說連結到兩道讓我印象深刻的數學問題，值得跟讀者分享。

在我讀博士班的時候，有一位有名的荷蘭數論學家 D. Zagier 到台灣來訪問， 1994 年當威爾斯證明了費馬大定理之後，他也參加邱成桐在香港中文大學舉辦的「費馬大定理」研討會。邱成桐知道 D. Zagier 懂多國語言，就指著桌子上的四個中文字，問他知不知道意思，D. Zagier 搖搖頭說不知道。其實那四個中文字是「

保持乾淨」，因為我也參與那次盛會，剛好坐在可以看到那四個字的範圍內。D. Zagier 青少年時得過國際奧林匹亞數學競賽的金牌，對有意思的中學問題也很感興趣，我曾經收藏過他列舉的一串有趣的中學數學題目及解答。那份收藏可能找不到了，但是有一道與矩形相關的問題及 D. Zagier 對那道問題的解法讓我印象深刻。後來我將那道問題收錄在《算術講義》那本書裡，而且還查到，Wagon 在《美國數學月刊》發表一篇文章[1]，文章裡列舉了有關那問題的十四種不同證法。

有一次與台大數學系張海潮教授（現已退休）在大考中心開會，趁空檔期間，張教授說「前幾天，一位旅居美國的華人到台大數學系演講，提到一道矩形問題，你知道那裡可以找到那問題的解答嗎？」其實他提的就是 D. Zagier 收藏的那道矩形問題，我說「有人列舉了十四種不同證法」，他聽了之後覺得不可思議。那道問題的敘述是這樣的：

如果一個大矩形可以分割成有限個各種大小可以不等的小矩形，且每個小矩形至少有一邊的邊長是正整數，那麼大矩形也一定有一邊的邊長是正整數。

D. Zagier 對這問題採取反證法，然後把眼光瞄準每個小矩形的四個角落，在每個角落都定義一個整數，然後用兩種方法求這些角落上的數字和，結果發現不相等，得到矛盾。

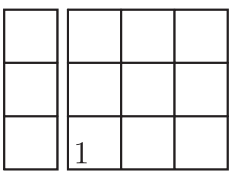
D. Zagier 對這問題的解法啟發了我想到「撕郵票問題」的一種作法。對矩形，你會注意到四個角落，如果是對一個人，那麼你又會注意到人的那幾個點呢？我想答案會依你的心態而有所不同。達文西會重視肚臍的位置或高度，因為他認為「身高除以肚臍高度」這個數字越接近黃金比 1.618，這樣的人越完美。佛教高僧也會重視肚臍，他們認為肚臍附近不僅是質量中心（剛出生嬰兒的重量中心點就在肚臍），也是能量中心。所以當他們靜坐時，經常注視，關照或冥想肚臍的位置，也因為如此，印度人常被西方人笑說成「看著肚臍的人」。看著一單張的郵票，你會注視郵票的哪一點呢？

看一張郵票除了欣賞圖像或風景之外，一定不會錯過的點就是

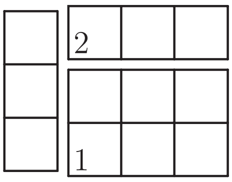
[1]Americam Mathematical Monthly, 94(1987), pp. 601 – 617.

它的面值，底下這張紀念數學家高斯的郵票，面值 10 就寫在郵票的左下角：

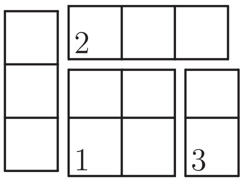
現在就讓我們來一趟「撕郵票，在每張郵票左下角定面值之旅吧」，過程是這樣的，先假設整頁郵票的每張郵票的面額還未決定，它是由你撕裂郵票的方式唯一決定。舉例來說，底下是一頁 4×3 的郵票，當第一次撕裂是沿著左圖的“鉛直連結線”撕開時，就在此“鉛直連結線”最下方左邊的那張單張郵票上寫上數字 1；第二次撕裂是沿著右圖的“水平連結線”撕開時，就在此“水平連結線”最左邊上方的那張單張郵票上寫上數字 2；⋯；依此繼續撕裂及在指定的單張郵票上，標上撕裂次數的數字，直到所有單張郵票都被分開為止。



第 1 次撕裂



第 2 次撕裂



第 3 次撕裂

在繼續之前，先做個練習

練習 1 下圖是一頁 4×3 的郵票，除了最左下角那一單張外，每一單張的左下角都寫 $1, 2, 3, \cdots 11$ 中的某個數字。

9	11	2	5
3	10	8	7
	4	1	6

請將這頁郵票撕裂 11 次，使得每單張都分離，而且這些指定數字剛好就是依照撕裂程序所填的數字。

有了這練習的經驗之後，現在考慮一般的情形，也就是考慮一頁 $m \times n$ 的郵票：因為每單張郵票最多有上、右、下、左四條“連結線”（邊上的單張郵票只有三條，角落的單張郵票只有兩條“連結線”），又撕裂過某單張郵票的上、右兩條“連結線”時，不可能將數字填入這單張郵票上，所以每單張郵票最多只會被填兩次數字（撕裂到此單張郵票的下、左兩條“連結線”才有可能）。進一步分析，不難發現這種填數字的方法有如下的性質：

① 第 1 次撕裂所填的數字 1 一定在這頁郵票的邊緣（左緣或下緣）某單張郵票上。

② 整頁最左下角的那一單張郵票不可能被填數字。

③ 每單張郵票最多只會被填一次數字。

④ 除了最左下角那一單張外，每一單張郵票剛好被填入一次數字。

從這些性質得，對一頁 $m \times n$ 的郵票，除了最左下角那一單張外，每一單張郵票剛好被填入一次數字，也就是說，有 $mn-1$ 張郵票被填入數字。因此，填入最大的數字為 $mn-1$，即總共撕裂 $mn-1$ 次後。

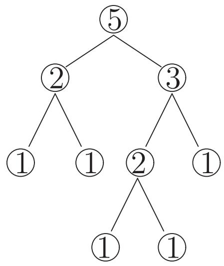
上述的解法是把撕裂次數與每單張郵票作了一一對應（除了最左下角那一單張沒對應外）。這都要歸功於 D. Zagier 那問題解法的啟示，及郵票左下角面額數字的暗示，才有辦法得到這規律。

接下來談論第二個想法，在談論之前，先把問題重新敘述成比較容易用數學歸納法證明的形式：

題目： 任何一頁由 N 張單張郵票所構成的矩形郵票，被完全撕開所需撕裂的次數與撕開的方式無關，且其次數恰為 $N-1$ 次。

「撕郵票問題」讓我想到一道有趣的問題，那問題是這樣說的：

月餅專賣店為了促銷，想出如下的花招：一盒月餅有 n 個，售價由顧客玩遊戲來決定，遊戲是這樣的，顧客須將 n 個月餅分成兩堆（每堆至少一個），並將兩堆的月餅個數相乘，得到第一個乘數。然後再將第一堆及第二堆各別再分成兩堆（每堆至少一個），又可得到兩個乘數。依此繼續下去，直到每一堆剩下一個月餅（不能再分）為止。這樣會產生很多乘數，n 個月餅的售價就是這些乘數的和。你知道如何將 n 個月餅分堆，才最省錢嗎？下圖是阿三在他的分堆方法之下，買五個月餅的錢數：



$2\times 3=\boxed{6}$

$1\times 1=\boxed{1}$ $2\times 1=\boxed{2}$

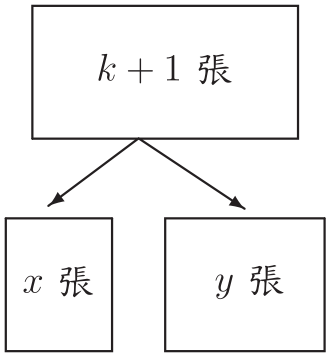
$1\times 1=\boxed{1}$

阿三這樣的分堆買五個月餅須付 $6+1+2+1=10$ 元美金。

我把這道問題稱為“用算術騙人的商店”，因為無論你如何分月餅，你所需要付的錢都是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 元。這道問題跟「撕郵票問題」很像，只是一個是“分月餅”，而另一個是“撕裂郵票”的差別而已。“用算術騙人的商店” 這道問題的解法是數學歸納法，就讓我們把它移植到「撕郵票問題」上看看吧！

(1) 當 $N=1$ 時，不需要撕裂郵票，所以撕裂次數為 0 次，與 $N-1=1-1=0$ 相等。

(2) 假設 $N=1,2,3,\cdots,k$ 時，所需的撕裂次數分別為 $N-1$ 次。當 $N=k+1$ 時，令第一次撕裂之後，所撕裂的兩頁郵票分別為 x 與 y 張，顯然有 $x+y=k+1, 1\le x<k+1, 1\le y<k+1$，即 $x+y=k+1, 1\le x\le k, 1\le y\le k$。



因為 $1 \leq x \leq k$，所以由假設知 x 張那一頁被完全撕開還需 $x-1$ 次。同理，y 張那一頁被完全撕開還需 $y-1$ 次。故 $k+1$ 張那一頁被完全撕開共需

$$1+(x-1)+(y-1)=(x+y)-1=(k+1)-1=k\text{（次）}$$

得證。

練習 **2** 利用數學歸納法證明，無論如何拆分，分 n 個月餅都需要 $\frac{n(n-1)}{2}$ 元。

利用數學歸納法證明「撕郵票問題」，證法雖然簡潔，但會有見樹不見林的感覺；利用填數字的方法證明「撕郵票問題」，雖然過程繁瑣些，但可以讓你見樹亦見林。你喜歡哪一種呢？或者你有自己的一套呢？接下來介紹我在中央研究院數學所培訓奧林匹亞選手時，師大附中何同學最直接了當的作法：

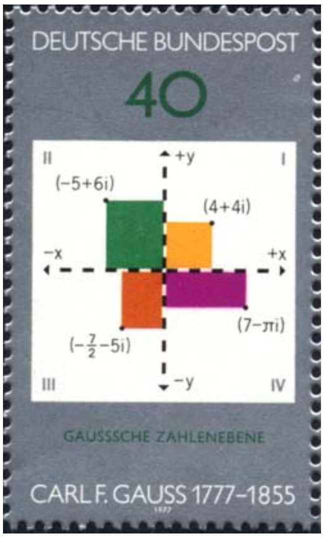
何同學的直覺

把撕郵票想成一般的撕紙張，第一次將他撕成 2 張，第二次，從中選一張再將他撕成 2 張，第三次，再從中選一張將他撕成 2 張，依此繼續下去，直到撕成 mn 張時就是所有單張郵票都分離的時候。

假設需要撕 k 次才能使所有單張郵票都分離。觀察撕第一次，二次，三次後的總張數分別為 $2,3,4$ 張，因此撕 k 次後的總張數應為 $k+1$ 張。由 $mn=k+1$ 得 $k=mn-1$，即將 $m\times n$ 張的整頁郵票完全撕開所需的次數為 $mn-1$ 次。

何同學看出撕郵票與任意撕紙張有張數的對應，不需把將焦點集中在撕郵票這個動作的迷障裡。

2 使用數學，不要被數學所使用



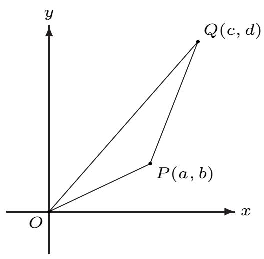
1831 年高斯認為複數不夠普及，在《哥庭根學報》上詳細說明坐標平面上的一個點 (a, b) 可以用複數 $a+bi$ 來表示，並建立了複數的某些運算，使得複數的運算也像實數一樣地代數化。 次年他發表了一篇備忘錄，第一次提出“複數”這個名詞，奠定複數在數學的地位。左圖是一張以複數平面為背景的郵票，這是為了紀念高斯大量的使用複數。對於一位創造數學概念，使用數學概念的人，發行郵票紀念他是應該的，總比紀念那些被數學所使用的人好。

我與“數學概念”這位奇人相遇的幾則小故事是在談論「中學學過的一些數學概念，如何在我解題過程中，扮演臨門一腳的角色，也讓我見識到“數學概念”這位巨人的魅力與威力。」幸虧有數學前輩們嘔心瀝血的提出這些“數學概念”，否則會走許多冤枉路。所以這裡的奇人就是“數學概念”，我只是安靜的觀察他們如何對問題下手的「觀察者」而已，或者說，我是“數學概念”的「粉絲」（fans）。

題目： (使用斜率) 如右圖所示，設 $P(a, b)$ 與 $Q(c, d)$ 是坐標平面第一象限上的兩個點。試判斷

$$ad-bc$$

的正、負情形。

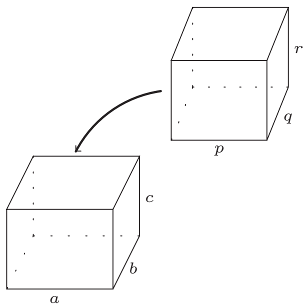


單從圖形來看，似乎可知 $a<c$ 與 $b<d$，但這樣的不等式只能推得 $ab<cd$，無法判斷 ad 與 bc 的大小。接下來，我們想透過與引進各種不同的"數學概念"來轉化與解決這個問題：

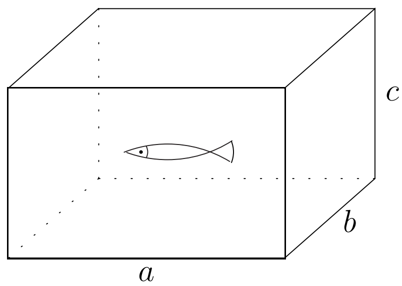
你利用「黑貓宅急配」寄過東西嗎？如果寄過，就會知道它的費率是根據箱子長、寬、高這三個長度"和"來計算的。讓我們研究一下長方體的長度奧秘吧！

題目：（使用拋物線的開口）

如右圖所示，長、寬、高為 p,q,r 的箱子可以以適當傾斜的角度或特殊擺放方式，整個放入另一個長、寬、高為 a,b,c 的箱子裡。試問 $a+b+c$ 是否一定比 $p+q+r$ 來得大呢？



想要使用好的"數學概念"解題，必須帶點想像力才行，讓我們把長方體想成透明玻璃製成的水族箱，裡頭養著一條觀賞魚。這條觀賞魚的視力有限，只能看見距離眼睛 x 以內的空間，所以當觀賞魚貼近水族箱邊緣時，除非將你的手放置在離水族箱邊緣 x 的範圍內，否則你對牠的招手是無效的。當觀賞魚在水族箱內到處游動時，牠所能看見的空間體積有多大呢？（這跟把一頭牛綁在一根木樁上，求牛所能吃到的草皮面積很像吧！）讓我們來計算一下吧！



笛卡爾創立直角坐標系，可以將許多平面幾何問題代數化處理，但是，那些應該定坐標系解決，那些不需要，是最難拿捏的地方。讓我們欣賞一道同時使用“直角坐標”與“有向角”這兩個數學概念的題目：

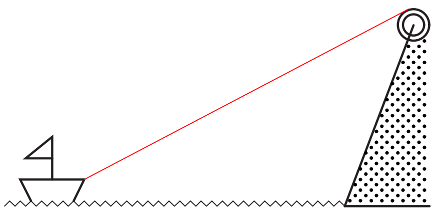
題目：(使用坐標與有向角) 印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方位上。

問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？

（太陽昇起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北）

「兩邊之和大於第三邊」是大家在日常生活中與數學課程裡非常熟悉的三角不等式。這個概念的使用有時候很容易，有很明顯，但有時卻不容易發覺。底下就是一個例子

題目：(使用三角不等式) 如右圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。



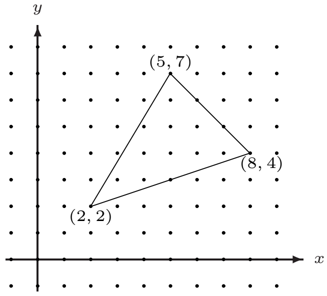
在房子裡，想估算間面積大小，最簡單的方式莫過於憑直覺。如果不靠直觀，另一個方便又準確的方法是「數鋪在地上的磁磚個數」。因為磁磚方方正正，每個大小相同，可以反應房間的大小。那麼，在直角坐標平面上，那個東西可以拿來當磁磚，反應面積呢？皮克就用排列僅然有序的「格子點」來表示面積。讓我面來欣賞這一概念：

題目： (使用格子點的個數)
格子點是直角坐標平面上 x 與 y 坐標都是整數的點，如右圖所示，三角形內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。

皮克發現：內部有 S 個格子點，邊上有 I 個格子點的三角形面積為

$$\frac{S}{2}+I-1.$$

你有比較好的方法解釋這公式的合理性嗎？

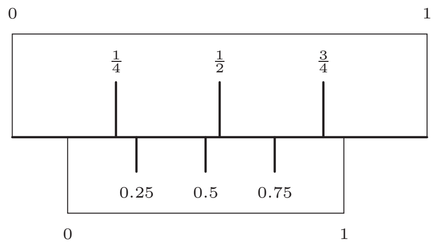


這個公式常稱為「皮克公式」。

每人心中各有一把尺，但你的尺跟我的尺有共同的交點嗎？讓“幾何相似”這概念來說明吧！

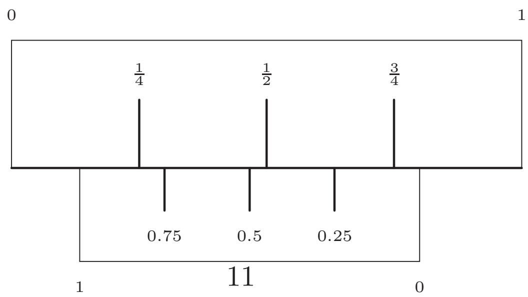
題目： (使用幾何相似) 右圖是兩把大小不一樣，但是刻度都是介於 0 與 1 之間的尺，將其刻度的邊任意的對在一起。

證明大小兩把尺必有一相同的刻度對在一起。



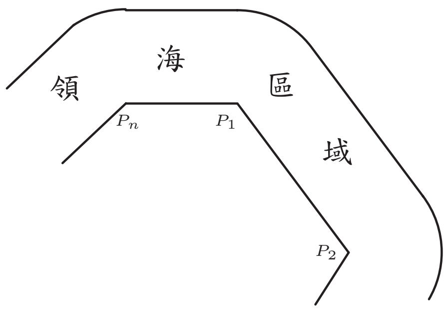
在日常生活中，碰到過兩種大小不一的刻度並排或並列嗎？溫度計就是一個例子，它有攝氏及華氏兩種刻度。將上面作法使用在溫度計時，你將發現 -40℃ 與 -40°F 的刻度是在同一高度上。

練習 **3** 如下圖所示，將小尺調個頭與大尺接觸，是否他們仍會有相同的刻度對在一起。



題目： (使用多邊形內角和)
考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\cdots P_n(n \geq 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。試證明：她的領海面積是

$$(p + \pi d)d.$$



練習 4 如果這是個周長為 l 的圓形國家，那麼其領海面積是多少？

“蝴蝶效應”相傳是洛倫茲在一次計算中首次偶然發現的。1961 年洛倫茲在進行長期天氣預報的計算，當時在計算中使用了一台現在看來速度太慢的電腦，有一次他在計算中斷後重新開始計算時，把上一次計算的中間資料作為這次計算的初始值輸入電腦，指望在重複給出上次的計算結果後電腦再繼續運行下去。然而出人意料的是計算結果只在開始的一小段與原來結果偏差很小，之後偏差越來越大以致得到完全相反的結果。洛倫茲意識到問題出在他輸入資料的精度上。因為電腦能以六位元小數運行，這次存儲下的是：0.606127，而印表機僅列印了前三位元數位：0.606。這次他是以這個三位小數作為重新計算的初始值，忽略掉了尾數 0.000127。洛倫茲認為造成重大偏差的原因就是忽略掉了這點尾數，由此他認定這個方程對初始值具有高度的敏感性。洛倫茲將這一現象形象地比喻為“蝴蝶效應”，意思是說一隻蝴蝶扇動翅膀所引起的氣流擾動會發展成一場“巨大風暴”。

“蝴蝶效應”是“混沌數學”可以解釋的一種現象。什麼是“混沌數學”呢？它是由多項式、三角函數等這些基本函數迭代而成的複雜數學，現在就讓我們來計算一道拋物線所產生的“混沌數學”：

題目：　(使用一次因式檢驗法)

如右圖所示：拋物線

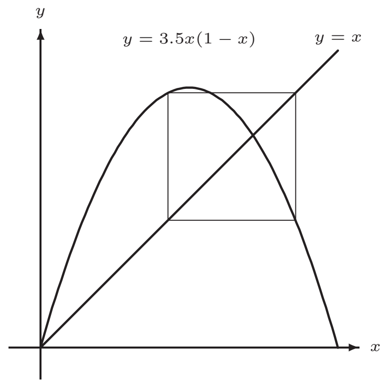
$$y = 3.5x(1-x)$$

與直線

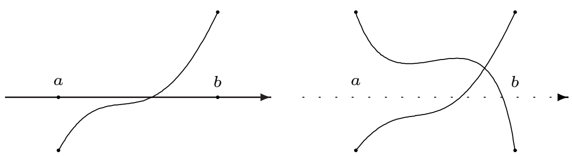
$$y = x$$

上各取兩個相異點，使它們成為正方形。

求拋物線上取的點坐標為何？



「勘根定理」是說「當 $f(a)f(b) < 0$ 時，$f(x) = 0$ 有一介於 a 與 b 之間的實數根。」其實比較好的講法是「從 $x = a$ 畫到 $x = b$ 的兩條曲線，如果在 $x = a$ 時，第一條在第二條的上方，而在 $x = b$ 時，第二條在第一條的上方，那麼這兩條曲線必定在中途相遇過。」



在「勘根定理」中使用的兩條曲線就是 $y = f(x)$ 與 x 軸。

題目：　(使用勘根定理的概念) 和尚每逢週末都有兩天的朝聖之旅。週六的早上八點，準時從山腳下的入口處山發，傍晚五點準時到達山頂的寺廟；週日則是早上八點，準時從寺廟出發，走昨天經過的路，並準時於傍晚五點返回山腳的入口處。

在這兩天的朝聖行程裡，會有某個時刻，他們剛好在同一個地點。

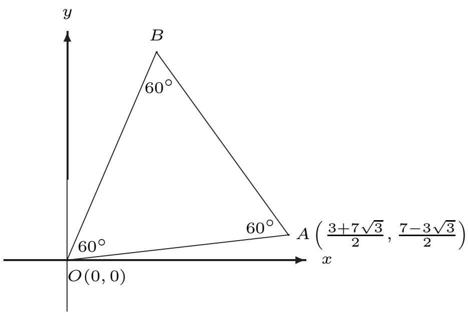
日常生活中，“勘根定理”這個概念經常被使用，只是你沒有發覺而已，例如早上你搭客運從台北到高雄，而同時你的友人從高雄也搭客運來台北。雖然兩人不可能聚在一起，但是某個時

刻，你們在路上肯定是相遇過的。又如颱風有颱風眼，微笑會有酒窩，頭髮會有旋轉中心，這些都是球面上“勘根定理”的例子。

題目： (使用棣美弗定理)

在右圖中，三角形 OAB 是坐標平面上的正三角形，且 $O=(0,0)$，

$$A=\left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2},\frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right).$$



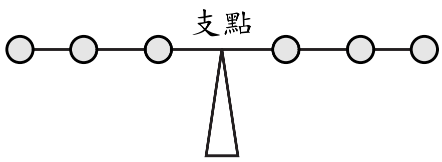
試求 B 點的坐標。

小時候大家一定玩過蹺蹺板，蹺蹺板的技巧幾乎每個人都瞭解，讓越重的人坐離支點越遠的地方越好，因為這樣產生的力距最大。至於什麼是力距呢？當然是重量乘以離支點的距離了。可是你曾想過嗎？簡單、容易瞭解的蹺蹺板原理會與複雜、抽象的向量內積相關。

題目： (使用蹺蹺板的概念)

設實數 $a,b,c;p,q,r$ 的大小為

$$a\geq b\geq c\geq 0, p\geq q\geq r\geq 0.$$



試比較

$$ap+bq+cr, aq+br+cp, ar+bq+cp$$

的大小關係。

如果仔細觀察，不難發現 $ap+bq+cr, aq+br+cp$ 與 $ar+bq+cp$ 這三個量可以表成空間向量的內積如下：

$$\begin{aligned}
ap+bq+cr &= (a,b,c)\cdot(p,q,r);\\
aq+br+cp &= (a,b,c)\cdot(q,r,p);\\
ar+bq+cp &= (a,b,c)\cdot(r,q,p).
\end{aligned}$$

由內積公式

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\text{（向量 }\overrightarrow{a}\text{ 與向量 }\overrightarrow{b}\text{ 的夾角）}$$

與不等式 $ap+bq+cr\geq aq+br+cp\geq ar+bq+cp$ 可以知道，向量 (a,b,c) 與向量 $(p,q,r),(q,r,p),(r,q,p)$ 之間的夾角關係。

練習 5 設向量 (a,b,c) 與向量 $(p,q,r),(q,r,p),(r,q,p)$ 之間的夾角分別為 α,β,γ。寫下 α,β,γ 的大小關係。

事實上，利用蹺蹺板的概念，可以得到一般的不等式

$$ap+bq+cr\geq\begin{cases}aq+br+cp\\ap+br+cq\\ar+bp+cq\\aq+bp+cr\end{cases}\text{四數中的任一數}\ \geq ar+bq+cp.$$

題目：(使用行列式的概念)

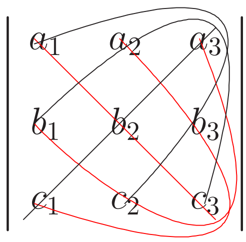
已知三個三位數

$$a_1a_2a_3,b_1b_2b_3,c_1c_2c_3$$

都是 17 的倍數，證明行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

也是 17 的倍數。



練習 6 (使用餘弦定理) 已知三角形 ABC 的邊長 $AB=c,BC=a,CA=b$ 及 $\angle BCA=30^\circ$，證明 a,b,c 不可能全為正整數。

練習 7 (使用行列式) 已知兩位數 a_1a_2 與 b_1b_2 都是 7 的倍數，證明

$$a_1b_2-a_2b_1$$

也是 7 的倍數。

將行列式的第一行乘以 10，然後將它們加到第二行得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 10a_1 + a_2 \\ b_1 & 10b_1 + b_2 \end{vmatrix}.$$

因為最後一行的兩個二位數

$$10a_1 + a_2 = a_1a_2$$
$$10b_1 + b_2 = b_1b_2$$

都是 7 的倍數，所以行列式的值為 7 的倍數（根據行列式的基本操作，可以提出 7 來，故為 7 的倍數）。故 $a_1b_2 - a_2b_1$ 是 7 的倍數。

〔註〕本問題也可以利用 $d|a, d|b \Rightarrow d|(am + bn)$ 的公式推導。 ☒

3 讓 43 跟 57 催眠你

台師大數學系趙文敏教授所著的《寓數學於遊戲》，是我大學期間看過的幾本通俗數學書籍之一。趙老師也是教我大一線性代數的老師。在國內數學系裡，將線性代數放在大一教授，而且是教比較抽象的，不是計算性的，是少見的。也因為這樣，我的同學在這一科學得很辛苦，我這輩子的第一張生日賀卡，是上線性代數這門課的時候，坐在後面的一位班上女生送給我的，這個舉動讓我誤以為「我被欣賞了」，但很快的就證實那是個「大陰謀」。過了幾天，她借了我線性代數的筆記去欣賞，這是她不瞭解我的第一步。我的數學筆記是很誇張的，每頁大概只寫六、七行，每行只寫八、九個字，每個字都很大，大概也只有故宮收藏的書法家墨寶或者是沒讀過書的人之作品，才有辦法寫出像我的字體這樣的神韻。再過沒幾天，她就直接約我，當然是請我教她線性代數的內容與習題，不是約會。這雖然是很久以前的往事了，但是最近碰到這位班上同學，她盡然還提起這件事，感謝我的指導，讓她成績很高。

關於《寓數學於遊戲》這本書的內容，我只記得一道遊戲，那是因為教授師大數學系的暑期進修班時，需要比較軟性，又可

以消暑解渴的數學教材，數學遊戲大概是最佳的選擇。於是想到那道遊戲，為了增加它的難度，或者說，創新一下，不要拾人牙慧，善用了學數論的專長，將那道遊戲稍微修改：

題目： 請對方從

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 50$$

裡想一個數（不要說出想的數），再從

$$43, \quad 57$$

這兩個數任選一個數（不要說出選的數）。現在將「想的數」與「選的數」相乘，你只需告訴我乘積的末兩位數，我就可以快速的猜出你「想的數」與「選的數」各為何？

舉例來說，當你「想的數」為 38，「選的數」為 43 時，因為 $38 \times 43 = 1634$ 的末兩位數為 34，所以只需告訴我 34，我就可以準確的說出「想的數」 38 與「選的數」 43 這兩個數。

試問這遊戲的奧秘為何？
