數學遊戲三則

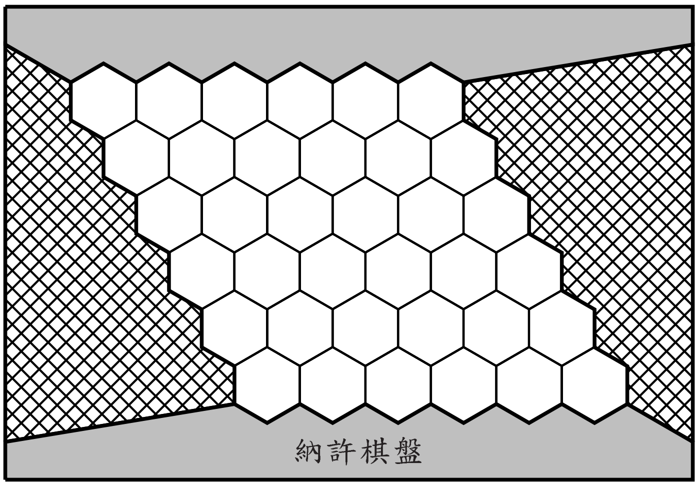
許志農
國立台灣師範大學數學系

November 2, 2005

目 錄

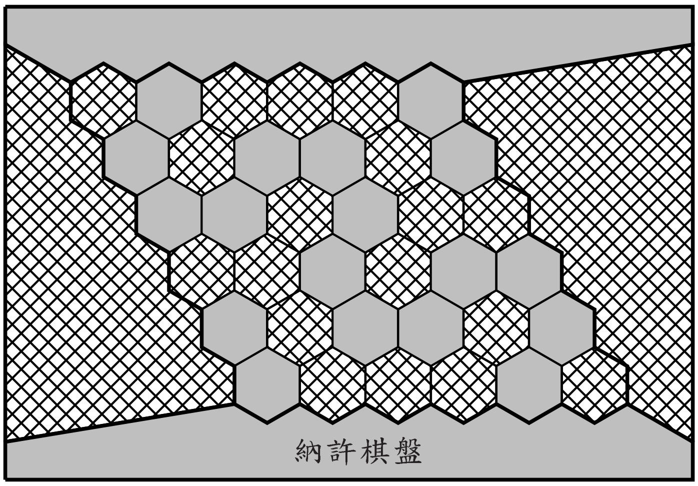
1 納許棋的奧秘

看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋盤，據說是他在普林斯頓高等研究院的廁所發現的。因為廁所的磁磚是正六邊形鋪成的，所以納許棋是跟正六邊形有關的遊戲。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形磁磚鋪成）：

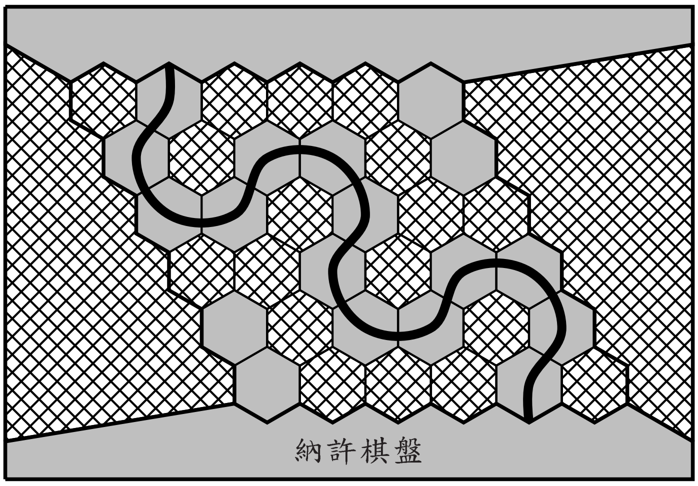


「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那們另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是這裡所要討論的問題：

問題 1 (納許棋) 無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利。

兩人玩的遊戲有許多，如象棋，五子棋，圍棋，西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道

遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的是如此嗎？讓我們來欣賞灰姑娘的錦囊妙計：

灰姑娘的勞作解法

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根据考古其歷史可追朔到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？

如果網先生的兩塊網狀領土可以透過他佔領的正六邊形土地銜接，那麼網先生就是獲勝的人。否則（網先生無法銜接他的兩塊網狀領土），需說明灰姑娘可以串連她的灰色土地。證明方法是這樣的：

① 利用剪刀將網先生的左、右兩塊網狀領土剪掉。

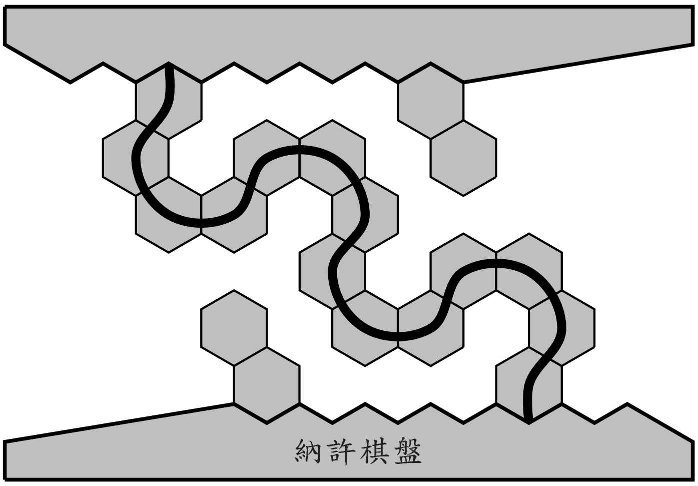
② 再利用剪刀將網先生佔領的十八塊正六邊形網形土地也剪掉。

③ 此時棋盤剩下灰姑娘的上、下兩塊灰色土地及她所佔領的十八塊正六邊形灰色土地。

④ 將右手抓住灰姑娘上方灰色土地，左手捏著灰姑娘下方的灰色領土。看看是否可以將它們拉開。

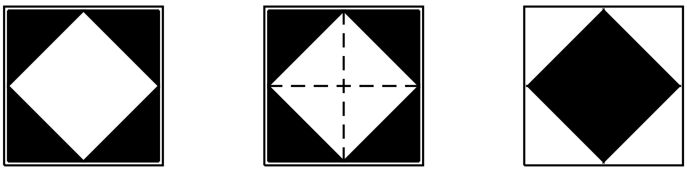
⑤ 若不能拉開，則表示灰姑娘的上、下兩塊灰色土地被她佔領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣。

⑥ 若可以拉開，則沿著灰姑娘的上方灰色土地的下沿，可以找到貫穿網先生左、右兩塊網狀領土的路徑，這樣代表網先生獲勝。



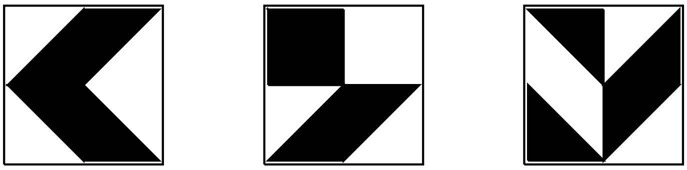
到此，我們已經知道納許棋是一種不會合棋的遊戲。接下來的問題就是「先玩者與後玩者何者有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。

練習 **1** 如下第一圖所示，正方形中心畫一個鑽石菱形。現在將正方形平分成四個小正方形（第二圖），將右上與左下交換，右下與左上交換，得到第三圖。



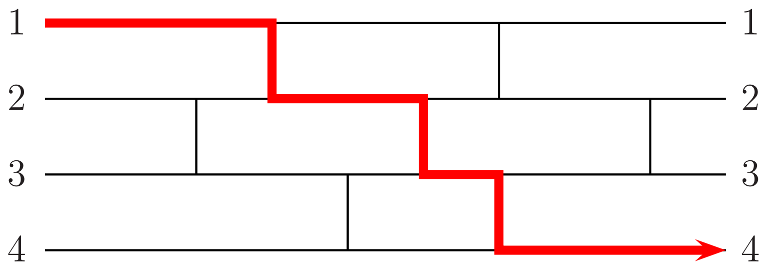
▲ 鑽石遊戲

像這樣，將四個小正方形的位置互換所產生的圖形，稱為原圖的置換圖。試問：下列三個圖，哪幾個是置換圖。



香港有個地產集團設立「恆隆數學獎」（由丘成桐院士主持），用來獎勵中學生在數學科展上的貢獻。首屆（2004 年）銅牌獎是在討論「畫鬼腳」這道中國的傳統遊戲。如下圖所示，在四條

平行線間畫了七條鬼腳後，左邊的數字 1 往右前進，碰到鬼腳就轉彎，最後抵達數字 4 的位置。



〈鬼腳圖〉

同樣的方法可以發現，數字 2 會走到 2 的位置，數字 3 會跑到 3 的位置，而數字 4 會到達 1 的位置。為了方便起見，就用函數「$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$」來描述這鬼腳圖的結果。看似簡單的鬼腳圖，其實裡面隱藏著許多深邃的數學知識。就讓我們來一道鬼腳大餐吧！

練習 2 甲、乙兩人輪流在下圖中畫鬼腳，甲先畫一條鬼腳，接著換乙畫，⋯，依此次序輪流畫。

〈鬼腳圖〉

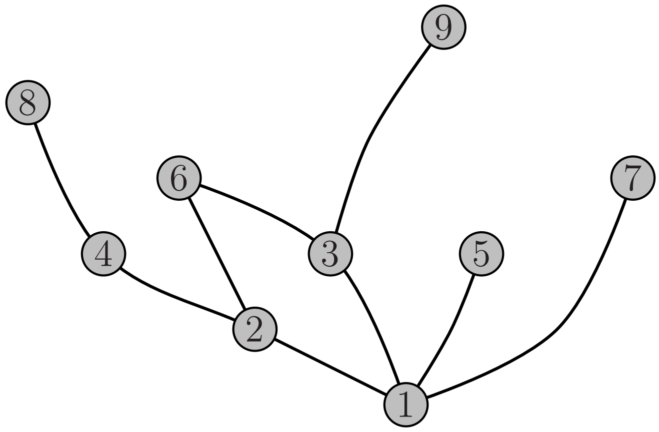
至於鬼腳畫在何處，甲、乙兩人可以自由決定。當有人畫完鬼腳之後，所對應的函數為「$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$」時，此人得勝，比賽停止。

問何者可以得勝。

練習 3 (拔“數”遊戲) 如下圖所示，在種植編號分別為

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

的九棵大樹裡進行拔樹遊戲。甲、乙兩人輪流拔樹，每次拔一棵樹，但是當編號 6 的樹被拔掉時，編號 1, 2, 3 (6 的因數) 的樹也跟著除掉，依此規律拔樹。最後把樹拔光的人獲勝。



〈拔數圖〉

問何者可以得勝。

練習 **4** 這是一道“讀心數”的遊戲，規則是這樣的：玩者先想任意兩個數（不告訴任何人這兩個數），叫做 a_1 與 a_2，接下來將這兩個數相加，令 $a_3 = a_1 + a_2$，再將 a_2 與 a_3 相加，得 $a_4 = a_2 + a_3$，如此繼續下去，得到數列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_7, \cdots, a_{10}.$$

你只需告訴我 a_7 的值，我就知道

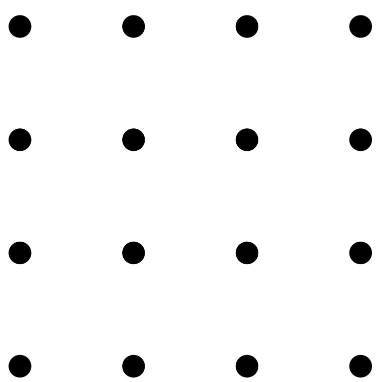
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$$

的值。個中道理為何呢？

透過遊戲的互動，傳達數學的概念，是我一直想做的事情。但是，恰當的數學遊戲不多見，不是坊間已有解答，就是無法精準的傳遞數學概念，或者遊戲本身不具有任何數學規律或意義。感謝建中紅樓人的幫忙，讓我對一道有興趣的遊戲有更上一層樓的理解，或者說找到那道遊戲的最後一塊拼圖也可以。

星期三下午，陰霾的天氣籠罩著台北城，即使天氣不好，也沒辦法澆熄建中學生對數學真理追求的熱情。每次到建中演講，我都喜歡採取不一樣的演講策略，或者說是一種試驗或試探的策略，在一般學校的演講，我不敢也不能採用這種模式。在“ㄇ”字形的演講場地，最適合讓學生玩數學遊戲，因為學生的互動容易，討論方便。建中的數理資優教室就是排成“ㄇ”字形。記得那次演講給了幾道數學遊戲，其中有一道叫「蓋房子」的遊戲：

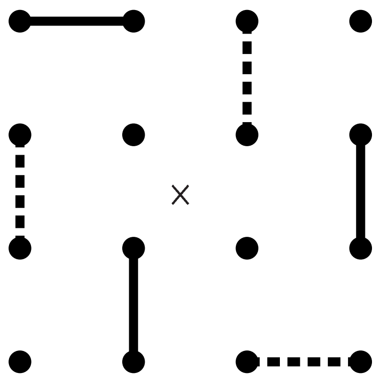
問題 2 下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。



因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且一定有一人佔有比較多的房子（總共有 9 間房子），也就是說不會平手。學生兩人一組玩這道遊戲，不需花多少時間就可以大戰好幾回合。重點是如何識破這道遊戲的數學意義呢？如果沒有那種想要識破它的衝動跟企圖心，你就像多數人一樣，毫

無目的的玩這道遊戲。說實話，我在給這道遊戲時，我只知道後玩者常常會贏，至於贏的策略是什麼？我仍在摸索中。所以給他們玩這道遊戲，可以說是一種試探，看看可不可以找到破題的人。

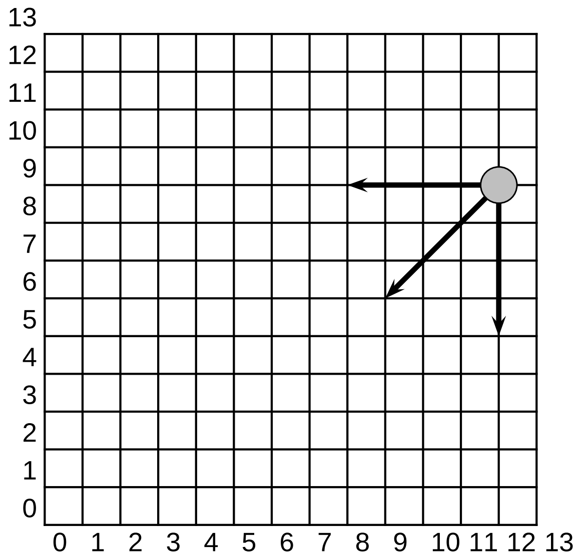
在學生的喧嘩聲中，傳來很刺耳的兩個字。當下，我有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到這遊戲的最後一塊拼圖。當然，講出這兩個字的同學，稱他為現代阿基米得也不為過，他的神情就像光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」一樣。究竟那兩個字有這麼大的魔力，可以破題呢？讓我們用下圖來告訴你那兩個字是什麼（粗黑線是先玩者，粗虛線為後玩者）：



真希望你能拈花微笑的說出那兩個字。

3　一子棋的誘惑

問題 3 (一子棋遊戲) 下圖是圍棋棋盤，一子棋是兩人玩的遊戲，甲先把一粒黑棋任意的擺放在棋盤的兩線交點上，擺好後，乙決定誰是先玩者，誰是後玩者。



遊戲規則如下：

① 先玩者與後玩者依序輪流移動黑棋。

② 可以向下，向左或向對角線方向移動任意格（如圖所示）。

③ 將黑棋移至左下頂點者贏。

對這樣的遊戲，贏的策略是什麼呢？

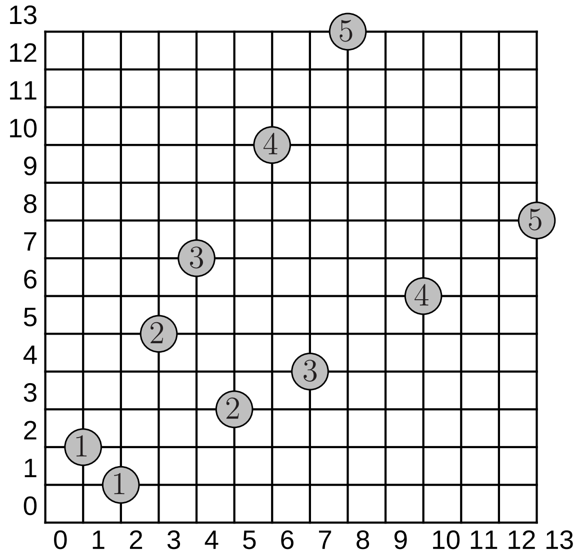
“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：早期到美國討生活的華僑勞工，很多都從事鐵路工人，他們趁著休息時刻，經常玩“拈”這道遊戲，它的遊戲規則是這樣的：

(1) 先玩者與後玩者依序輪流拿取兩堆預先給定的石頭。

(2) 可以從兩堆中的任一堆拿取任意顆的石頭或者同時從兩堆裡拿取石頭，但是拿取的個數必須一樣。

(3) 最後將兩堆石頭取完者贏。

“一子棋遊戲”那三個條件幾乎是“拈”這三個條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。現在就讓我們來談談“一子棋遊戲”的必勝策略吧！



4 隱藏的和諧比看得見的和諧來得好⋯隱藏在天平上的和諧

每個學校，團體或教會都立有校規，教條或戒律。只要人人遵守這些條款，學校或團體就會和氣與和諧。但是，可曾想過，如果沒有這些白紙黑字的規矩，那麼和諧還會存在嗎？如果會，那又何必立這些規矩或條款呢？所以這些看得見的和諧僅是表面的、膚淺的，事實上應該說這些看得見的和諧根本就是不和諧的意思。所以我們要追求的，並不是這種看得見的和諧，而是隱身在後的那種隱藏的和諧。想想看，我們彎曲的背脊中，一定有某種隱藏的和諧存在，否則天天彎曲扭轉它，為何它不容易受傷或折斷呢？所以兩千多年前的希臘哲學家赫拉克利特就說過「隱藏的和諧比看得見的和諧來得好。」

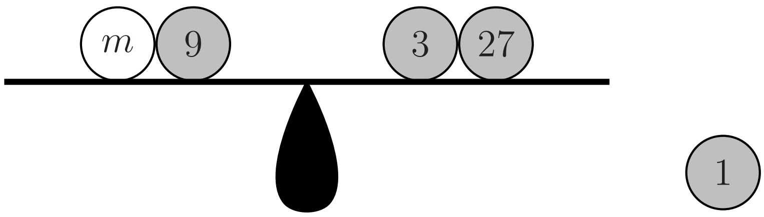
《數學傳播季刊》是適合高中以上程度讀的數學刊物，也是國內出版的少數中文數學刊物之一。季刊的稿件是由國內數學專家審查，有幾次我也審查過它們的文章。最近一次是審查一篇利用天平解決一道龍騰《數學新天地》問題集裡的題目。「當天平平衡時，天平兩邊的重量相等」，這是大家都清楚的一個原理。但是，

你可曾知道，這麼簡單的原理背後卻隱藏著深刻的數學和諧。挖掘隱藏的和諧是學數學的一大樂趣，也是科學研究的重要目標。這裡要介紹的這位奇人，不僅深諳天平裡的和諧，也將這和諧應用在一道與減法有關的數字分群問題上。

4.1 梅齊里亞克的砝碼問題

一位商人有一個 40 磅的砝碼，由於跌落在地而碎成四塊。後來，秤得每塊碎片的重量都是整數磅，而且可以用這四塊來秤從 1 至 40 磅之間的任意整數磅重物（某些砝碼可以與秤物放在天平同一邊的秤盤裡）。問這四塊砝碼碎片各重多少？這就是有名的巴舍・德・梅齊里亞克的砝碼問題。

如下圖所示，令四塊砝碼碎片各重 $1, 3, 9, 27$ 磅，秤物重 m 磅。利用「天平平衡代表左、右秤盤等重」原理得知 $m+9=3+27$，也就是說，秤物重 $m=3+27-9=21$ 磅。



▲ 天平兩邊秤盤放置砝碼與秤物的示意圖

上圖中並沒有用到 1 磅重的砝碼，所以將它放置在天平的左、右秤盤外。為了真實的反應左、右秤盤裡的砝碼及秤盤外的砝碼，我們可以將秤物重 m 重新寫成

$$m = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 9 + 1 \cdot 27$$

的形式，其中係數 0 的砝碼代表未被使用的砝碼，係數 1 的砝碼代表放在右秤盤砝碼，係數 -1 的砝碼代表放在左秤盤砝碼。

〈梅齊里亞克的砝碼問題〉

使用磅數為 $1, 3, 9, 27$ 磅的四個砝碼可以秤得從 1 至 40 磅之間的任意整數磅秤物。

因為 1 磅重的砝碼可以放在左秤盤裡、右秤盤裡或秤盤外三種情形，

同理，$3,9,27$ 磅重的砝碼也都各有三種不同的放法。所以四塊砝碼一共有

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$$

種放法。有幾個小問題需要解決：

① 四塊砝碼可以秤最重的秤物是幾磅。

② 磅數 m 的秤物會不會有兩種不同的秤法呢？

③ 因為秤物放置在左秤盤，而且秤物的重量是正整數磅，所以左秤盤的砝碼總重必須小於右秤盤的砝碼總重。上述 81 種砝碼放法中有幾種符合這原則。

將 $1,3,9,27$ 磅這四個砝碼都放在右秤盤時，秤物的重量（磅）為

$$m=1+3+9+27=40.$$

顯然的，這是四塊砝碼可以秤得最重的秤物重量，如此解決了 ① 的問題。

接著討論 ②：如果 m 可以有兩種不同的秤法，那麼代表

$$m=a_0\cdot 1+a_1\cdot 3^1+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3=b_0\cdot 1+b_1\cdot 3^1+b_2\cdot 3^2+b_3\cdot 3^3$$

有兩種不同的解 a_i 與 b_i，其中 a_i 與 b_i 都是 $-1,0,1$ 的數。但是將 m 除以 3，從 a_i 得餘數為 a_0，從 b_i 得餘數為 b_0。所以 $a_0=b_0$。將兩式各減去 $a_0=b_0$，再除以 3 得

$$a_1\cdot 1+a_2\cdot 3^1+a_3\cdot 3^2=b_1\cdot 1+b_2\cdot 3^1+b_3\cdot 3^2.$$

同法（除以 3，求餘數）可得$a_1=b_1$。依此類推 $a_2=b_2,a_3=b_3$。這告訴我們：任何磅數 m 的秤法不可能有兩種（至多一種）。

最後探討 ③：當所有四個砝碼都不放在左、右秤盤上時，不需要秤物（或秤物 $m=0$）天平會平衡，除了這種放法之外，任何一種放法不是左秤盤比較重，就是右秤盤比較重。所以 81 種砝碼放法中，左秤盤的砝碼總重大於右秤盤的砝碼總重的放法有

$$\frac{81-1}{2}=40$$

種，也就是說，有 40 種不同的砝碼放法可以量得秤物重量（要求秤物為正整數磅，且秤物放在左秤盤）。

綜合 ①、②、③ 知道：81 種砝碼擺放方式中，有 40 種可以秤得左秤盤上的秤物重量，每種擺法秤得的重量都不同，而且重量介於 1 至 40 磅之間。這就是說，使用磅數為 $1, 3, 9, 27$ 磅的四個砝碼可以秤得從 1 至 40 磅之間的任意整數磅秤物，而且秤法都只有唯一的一種。 $\boxtimes$

有關巴舍・德・梅齊里亞克的砝碼問題，有底下四件事情需要補充：

(1) 如何秤 $m = 25$ 磅的秤物，也就是解

$$25 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3$$

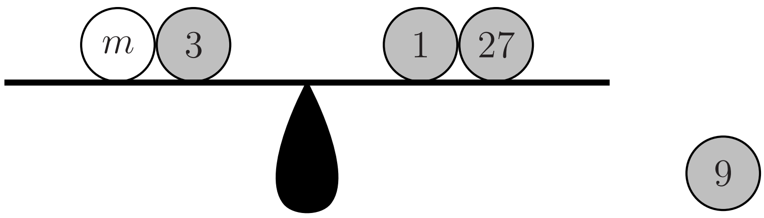
的意思，但要求 a_0, a_1, a_2, a_3 只能是 $-1, 0$ 或 1 的數。將兩邊除以 3 得餘數分別為 1 與 a_0，即 $a_0 = 1$。此時，等式可化簡為

$$8 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 3^1 + a_3 \cdot 3^2.$$

同法可得 $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1$，即

$$25 = 1 \cdot 3^0 - 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3,$$

其對應的示意圖為



(2) 除了像 (1) 這樣的方法求得係數外，也可以利用 3 進位來求 $m = 25$ 的表示式。因為 25 的 3 進位表示法為

$$1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2.$$

將表示法中的係數 2 用 $-1+3$ 取代，得到

$$\begin{aligned}25 &= 1\cdot 3^0+(-1+3)\cdot 3^1+(-1+3)\cdot 3^2\\ &= 1\cdot 3^0-1\cdot 3^1+1\cdot 3^2-1\cdot 3^2+1\cdot 3^3\\ &= 1\cdot 3^0-1\cdot 3^1+0\cdot 3^2+1\cdot 3^3,\end{aligned}$$

這就是 $m=25$ 的表示式。

(3) 梅齊里亞克的砝碼問題可以推廣為：使用磅數為

$$1, 3^1, 3^2, 3^3, \cdots, 3^n$$

磅的 $n+1$ 個砝碼可以秤得從 1 至 $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ 磅之間的任意整數磅秤物。

(4) 如果只能使用 $1, 3, 9$ 磅的砝碼，那麼可以秤得從 1 至 13 磅之間的任意整數磅秤物。

4.2 一道數字的分群問題

問題 4 將

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 13$$

這十三個數字分成三群，使每群中的任兩個數字差都不在該群內。

這是龍騰數學新天地第十二期《問題集》中的一道問題。分法有許多種，本人原本是希望讀者採取土法煉鋼的方法，沒想到有一位高中老師將本問題與梅齊里亞克的砝碼問題連結，得到這問題的另一種有系統且完整的妙解。就讓我們來欣賞這位奇人突如其來的妙想。

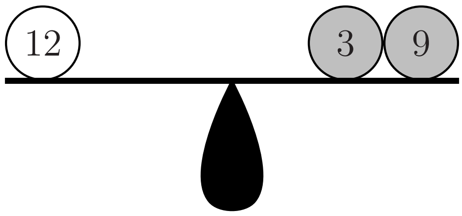
〔高中老師的妙想〕

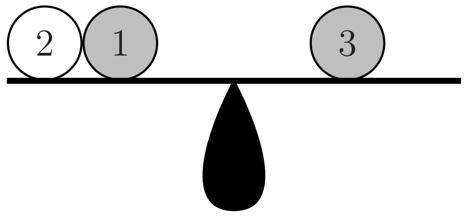
梅齊里亞克的砝碼問題告訴我們，用 $1=3^0, 3=3^1, 9=3^2$ 的砝碼就可以秤出 $1, 2, 3, \cdots, 13$ 這十三個數字。例如

$$2=-1\cdot 3^0+1\cdot 3^1+0\cdot 3^2;$$

$$12=0\cdot 3^0+1\cdot 3^1+1\cdot 3^2.$$

這兩個例子所代表的天平示意圖為：

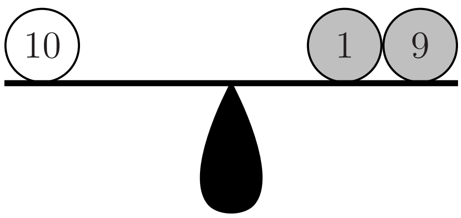




從示意圖發現，$m=2$ 與 12 所對應的右秤盤最輕的砝碼都是 3。我們就用右秤盤最輕的砝碼來分類，一共會有三類，分別是右秤盤最輕的砝碼為 $1,3,9$ 三類。現在將 1 至 13 依其示意圖右秤盤最輕的砝碼分類如下：

右秤盤最輕砝碼	左秤盤的秤物重 m
$1=3^0$	①、④、⑩、⑬
$3=3^1$	②、③、⑪、⑫
$9=3^2$	⑤、⑥、⑦、⑧、⑨

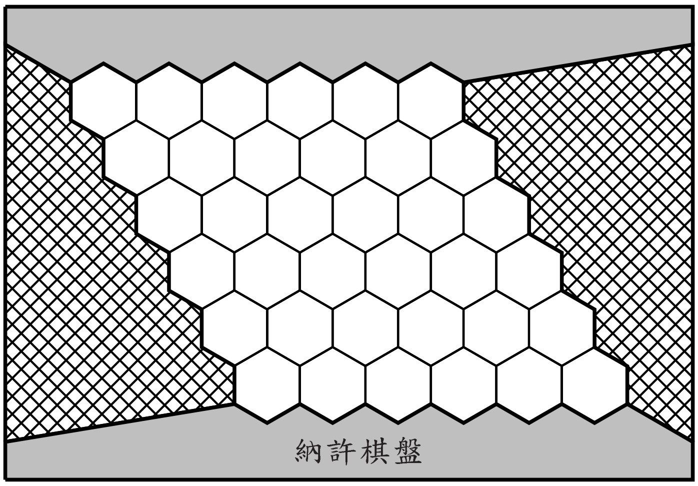
將 ①、②、③、⋯、⑬ 依上述方法分成表格裡所述的三群，我們容易驗算得知：每群中的任兩個數字差都不在該群內。事實上，也可以利用天平上擺放的砝碼來解釋。例如就以 $m=12$ 及 $m=2$ 為例，從上述示意圖知道，它們都是屬於第二群（右秤盤最輕砝碼為 3 的那群），它們的差 $10=12-2$ 屬於第一群，可以想成兩個示意圖右秤盤都有砝碼 3，所以會消掉。因此它們的差 $10=12-2$ 不可能繼續停留在原來的第二群。

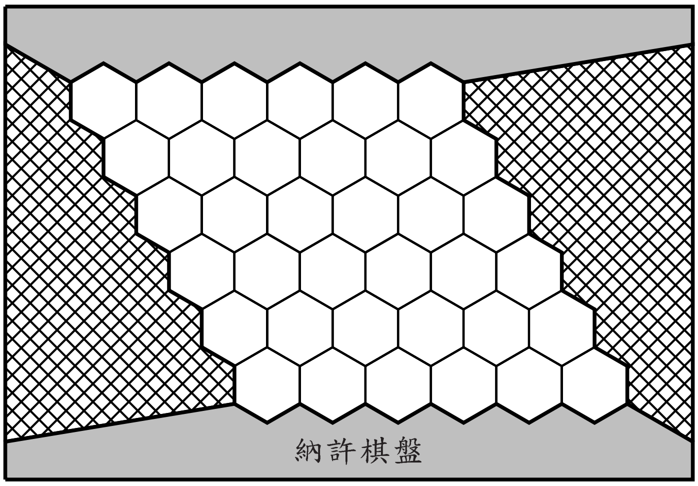


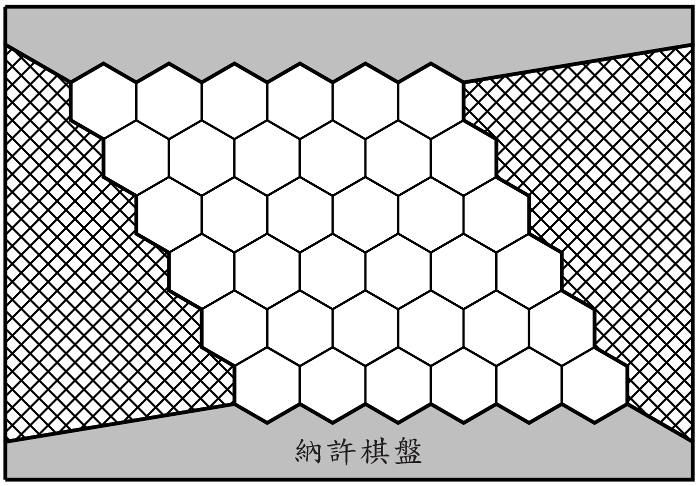
練習 **5** 將

$$1,2,3,4,\cdots,40$$

這四十個數字分成四群，使每群中的任兩個數字差都不在該群內。


納許棋盤


納許棋盤


納許棋盤