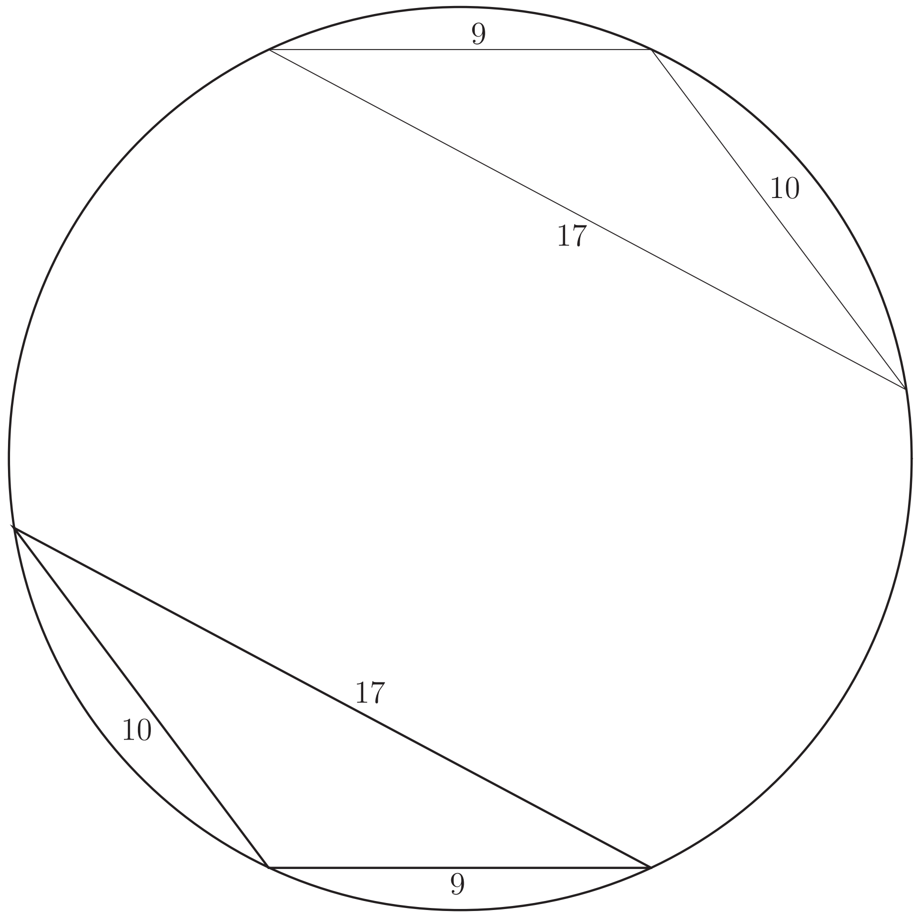
動手玩數學

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

July 17, 2006



三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數

動手玩數學

遊戲 **1**

☆☆☆☆

一天夜裡，福爾摩斯正在書房看書，突然電燈熄滅了，原來是保險絲燒斷。福爾摩斯同時點燃了備用的兩根蠟燭，在燭光下繼續閱讀，直到電工來把電燈修好。

第二天，他想看看昨晚斷了多長時間的電。但是，他當時沒有注意斷電的時間，也沒有注意是什麼時候來的電。於是他想通過瞭解點了多長時間蠟燭來推斷斷電時間。他找來找去，怎麼也找不到點剩的蠟燭。後來僕人告訴他，燒剩的蠟燭一支長度是另一支的 4 倍。原本兩隻蠟燭都是新的，而且原來長短一樣，但粗細不同，粗的一支點完需 5 小時，細的一支點完要 4 小時。

請你根據上面的訊息推算福爾摩斯前一晚上一共遇上斷電多長時間？

這是大陸第三屆“希望杯”全國數學邀請賽的培訓題。培養對文字很多的題目之閱讀與抓出數學要素的能力，是國中進入高中，甚至未來很重要的一種訓練。

動手玩數學

遊戲 **2**

☆☆

一位父親臨終前就遺產分配給他的兒子留下遺囑：第一個兒子分得 100 萬元與剩下遺產的十分之一；第二個兒子分得 200 萬元與剩下遺產的十分之一；第三個兒子分得 300 萬元與剩下遺產的十分之一；⋯；以此類推，所有的兒子分得的錢數正好相等。

請問：這位父親共有多少遺產？每人分得多少錢？〔註：剩下是指將前面分過的財產扣除之後，所餘的財產〕

這是尤拉出給中學生作的數學趣題。旨在訓練學生假設未知數及建立方程式的關係之能力。

動手玩數學

遊戲 **3**

☆☆☆☆☆

設 a, b 是數線上兩個正數，而且

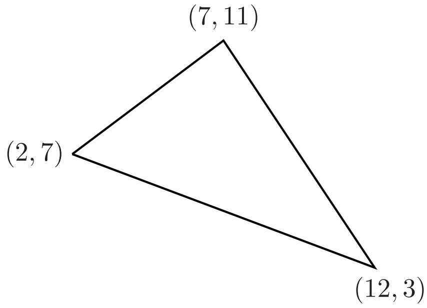
$$\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{4a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2+4b^2}$$

是一個三角形的三邊邊長。

(1) 設計一個矩形，使得上述三邊長的三角形之三個頂點剛好落在此矩形的邊線上。（必須說出矩形的長、寬及三個頂點所分割出的各條線段之長度）

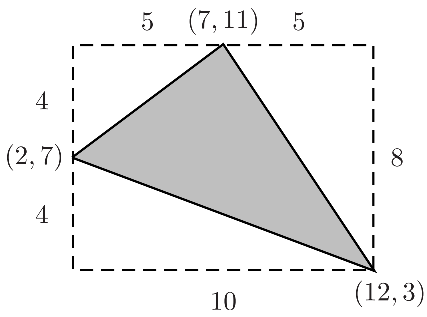
(2) 利用所設計的矩形，求上述三角形的面積。（以 a, b 表示）

談到三角形，角度、邊長與面積是經常要處理的三個基本量。如下圖所示，頂點坐標為 $(2,7),(12,3)$ 與 $(7,11)$ 的三角形，邊長可以利用兩點間的距離公式求得，面積可以透過一種稱為「補東補西補成好東西」的方法來計算：



分別在三角形的三邊補上直角三角形，如下圖所示，讓三角形好像裹在一個矩形內一樣。這時三角形的面積就是矩形面積扣掉三個直角三角形的面積，即

$$\text{三角形的面積} = 10\cdot 8 - \frac{1}{2}(10\cdot 4 + 8\cdot 5 + 5\cdot 4) = 30.$$



試著利用「補東補西補成好東西」的方法來完成這道問題。

動手玩數學

遊戲 **4**

☆☆

設 abc 是一個三位數的正整數。我們都知道

(1) abc 是否為偶數，只需判斷 c 是否為偶數即可。

(2) abc 是否為 3 的倍數，只需判斷 $a+b+c$ 是否為 3 的倍數即可。

(3) abc 是否為 9 的倍數，只需判斷 $a+b+c$ 是否為 9 的倍數即可。

(4) abc 是否為 11 的倍數，只需判斷 $a-b+c$ 是否為 11 的倍數即可。

除了這四個之外，相信很多人也記得 5 的倍數與 13 的倍數之判別方法。但是，你會 19 的倍數之判別方法嗎？請你檢驗底下的判別方法：

$$19|abc \Leftrightarrow 19|(10a+b+2c),$$

也就是說，abc 是否為 19 的倍數，只需判斷 $10a+b+2c$ 是否為 19 的倍數即可。

判斷一個大的數是否為某數的倍數之判別方法是學習整數性質相重要的一環。上述判別 $2, 3, 9, 11, 13$ 的倍數判別法不僅對三位數正整數適用，還可以推廣到一般的情形。關於這些判別方法的推理或證明，都需要用到整數的一個相當重要之除法性質：

$$d|a,\ d|b \Rightarrow d|(am+bn).$$

有關 19 倍數的判別法可以推廣為：$n+1$ 位的正整數

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

是 19 的倍數之判別方法為

$$10a_n + 2^0 a_{n-1} + 2^1 a_{n-2} + \cdots + 2^{n-2} a_1 + 2^{n-1} a_0$$

也是 19 的倍數。看了這個神奇的判別方法後，關於其它數的倍數判別方法，你有辦法挖掘嗎？

動手玩數學

遊戲 **5**

☆☆

宇富幫他父親記帳，有一筆糊塗帳這樣記著：

“哈蜜瓜 37 顆計 □4△7 元”

事後，宇富僅知哈蜜瓜每顆為整數元且數字 △ 比數字 □ 大。你能知道哈蜜瓜一顆是多少元嗎？

美籍匈牙利著名數學教育家喬治・波里亞有一本名著，叫《如何解題》，書中探討了關於數學解題的四個階段，依次是

(1) 瞭解題意。

(2) 制定解題計畫。

(3) 執行解題計畫。

(4) 回顧。

這則遊戲是修改自那本書的一道問題。我們習慣使用的數字表示法是所謂的十進位表示法，也就是，個位數代表 1，十位數代表 10，百位數代表 100，…的數字表示法。有了這個體認才能瞭解數字 □4△7 所代表的意義。

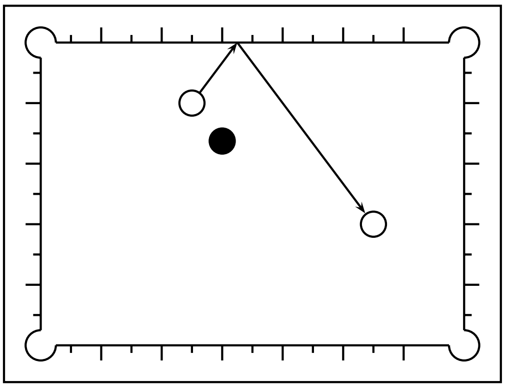
接下來就是將該數字表示出來，然後把已知數與含有未知數的部分分開，再利用倍數或因數的性質解題。在解完題，得到答案之後，可能需要檢驗與回顧整個解題過程。聰明的你，就來一趟波里亞式的解題四步驟吧！

動手玩數學

遊戲 **6**

☆☆☆

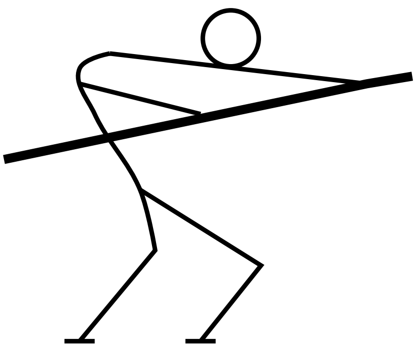
看過我國十六歲泰山神童吳珈慶打撞球嗎？當標的球被黑球擋住去路時，跳球（越過黑球上空）或間接擊球（碰撞檯邊再反射撞球）是常用的兩種擊球方法。

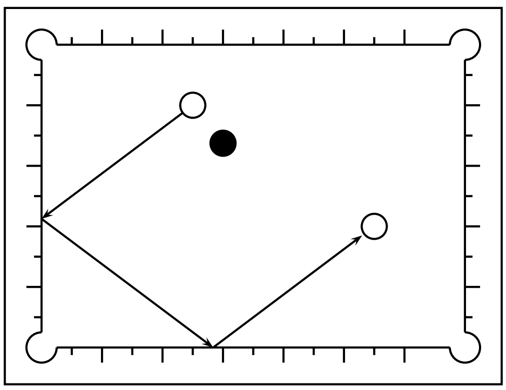


例如，在上圖中，想用白球撞擊另一顆箭頭所指的白球。因為黑球橫在中間，無法直接瞄準，所以借助球台邊的反射，是一招不錯的方式，但是，這時的瞄準點比較難拿捏，球在撞擊之前所跑的距離也跟著加長，失誤的機率提升不少。

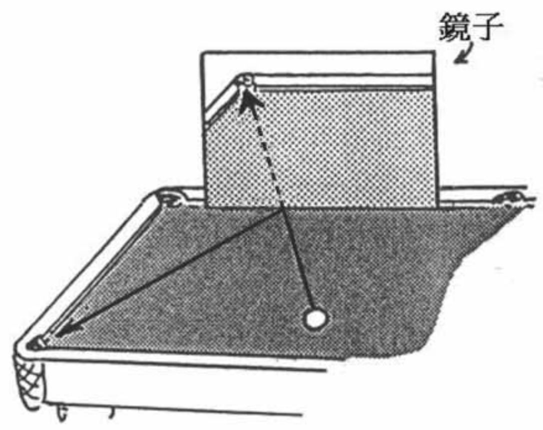
(1) 在上圖中，白球依實線方向前進，在碰到另一顆白球之前，總共走了多少距離（將球台邊相鄰兩長刻度的距離稱為 1 單位，答案以單位表示）。

(2) 如果想表現一下高超的撞球技術，採取下圖中的實線撞球，那麼在碰到另一顆白球之前，總共行經了多少距離。

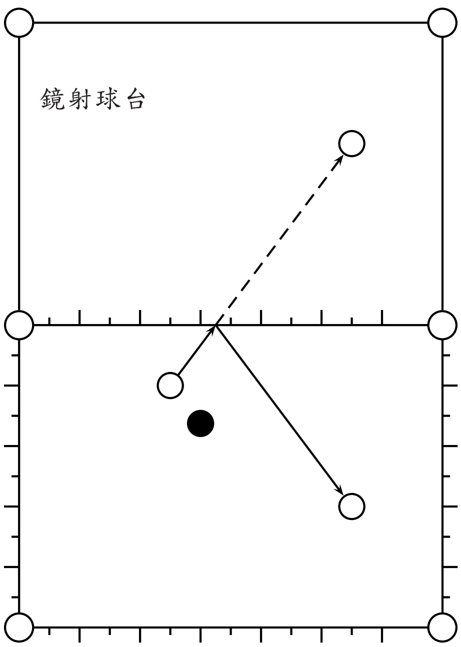




撞球最重要的物理性質就是入射角等於反射角，這個性質也可以用光學的物理性質來解釋，如下圖所示，在球台邊裝個鏡子，此時球行進的折線可以看成直線（跑進鏡子裡的球台）。



利用入射角等於反射角的鏡射原理，將折線拉直，如下圖所示（想成將球台往上作對稱）



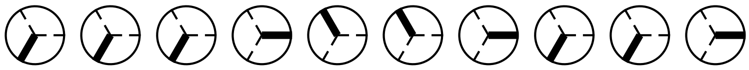
應用這個概念，將折線一一拉直便可解題。 ☒

動手玩數學

遊戲 **7**

☆☆☆☆

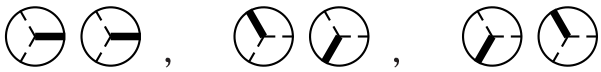
將十個方向盤排列如下圖，甲、乙、丙三人輪流轉動方向盤。



轉動方向盤的規則如下：

(1) 甲、乙、丙依序每次必須選定某一個方向盤，並將該方向盤逆時針旋轉 $120°$。

(2) 旋轉完方向盤後，需檢視是否有相鄰的兩個方向盤為底下的三種形式：

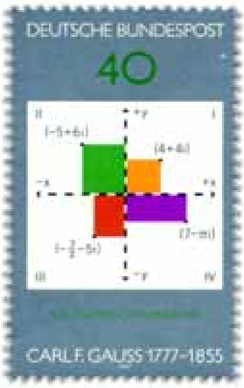


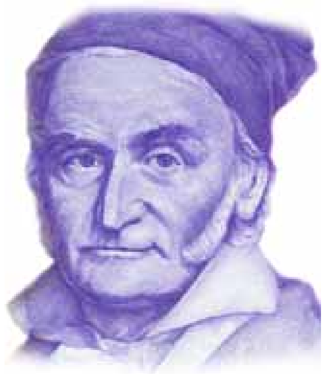
若有，則將這對方向盤拿掉。拿掉之後還需再檢視一遍，是否還可以繼續拿掉成對的方向盤，直到都不能拿掉時，才換下一位轉動方向盤。

(3) 拿掉最後一對方向盤的人獲勝。

你認為甲、乙、丙那一位有必勝的策略，必勝的策略又是什麼呢？

1831 年高斯認為複數不夠普及，在《哥庭根學報》上詳細說明坐標平面上的一個點 (a,b) 可以用複數 $a+bi$ 來表示，並建立了複數的某些運算，使得複數的運算也像實數一樣地代數化。 次年他發表了一篇備忘錄，第一次提出“複數”這個名詞，奠定複數在數學的地位。複數的最大好處是它可以表示方向與距離的幾何，又是可以作運算的代數。更難能可貴的則是這些代數運算也是在傾訴一些重要的幾何性質。下圖是一張以複數平面為背景的郵票，這是為了紀念高斯大量的使用複數。





複數 $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 具有底下的乘法性質

$$\begin{aligned}
w^2 &= \frac{-1-\sqrt{3}i}{2};\\
w^3 &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1;\\
w^4 &= w\cdot w^3 = w;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

也就是說，當 k 是 3 的倍數時，$w^k=1$；當 k 除以 3 餘 1 時，$w^k=w$；當 k 除以 3 餘 2 時，$w^k=w^2$。

試著把 $w^0=1, w^1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $w^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 標示在坐標平面上，看看這些點與方向盤的關連。

動手玩數學

遊戲 **8**

☆

小明做數學時，發現

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\sqrt{2-\frac{2}{5}} &= 2\sqrt{\frac{2}{5}} \\
\sqrt{3-\frac{3}{10}} &= 3\sqrt{\frac{3}{10}} \\
\sqrt{4-\frac{4}{17}} &= 4\sqrt{\frac{4}{17}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

按上述規律：

(1) 第五個等式為何？

(2) 第 n 個等式為何？並證明之。

這是大陸《希望杯》數學邀請賽的考題。發現規律與證明規律是學習數學很重要的步驟。最常見的發現規律問題是整數規律的發掘或幾何規律的探索。

動手玩數學

遊戲 **9**

☆☆☆

泰雅族女子在十三、四歲的時候，就開始跟著母親學習織布的技巧，也開始為自己準備出嫁時的衣裳。今有一泰雅族女子善於織布，織得很快，織的尺數成如下的規律增加：第 1 個月織 14 尺；第 2 個月比第 1 個月的 1.5 倍還多 1 尺；第 3 個月比第 2 個月的 1.5 倍還多 1 尺；⋯等。

(1) 此泰雅族女子第 5 個月織幾尺。

(2) 如果前 n 個月都以這樣的規律增加，那麼第 n 個月該女子織布幾尺（以 n 表示）。

在《張丘建算經》上，等差級數是書中一項重要內容，例如

(a) 某女子善於織布，一天比一天織得快，而每天增加的數量都一樣。已知第一日織 5 尺，30 日共織 930 尺，求每日比前一日多織多少？

(b) 有一女子不善織布，逐日所織布按日遞減，已知第一日織 5 尺，最後一日織 1 尺，共織了 30 日，問共織布多少？

如果把 (1) 中第 n 日織布長度設為 a_n 尺，那麼不難推得 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_n = a_{n-1} + 3. \tag{1}$$

至於等比級數，在《莊子・天下篇》中說過：「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」這段反映古人對下列無窮級數和結果的思想

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

如果把第 n 日截取的竿長設為 a_n 尺，那麼不難推得 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2}. \tag{2}$$

滿足關係式 (1) 的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為等差數列，而滿足關係式 (2) 的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為等比數列。等差與等比數列是歷史悠久，且極為重要的數列，這兩種數列可以求得一般項 a_n 的公式。

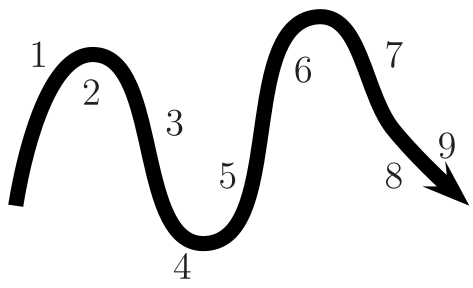
本遊戲是模仿《張丘建算經》中的問題而來，令 a_n 為該女子第 n 個月織布尺數，試著寫下 a_n 與 a_{n-1} 所滿足的關係式，並想辦法求得一般項 a_n 的公式。

動手玩數學

遊戲 **10**

☆☆

一般街道門牌號碼的編碼原則是從 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 編起，奇數號門牌與偶數號門牌編在街道的不同邊。



汀菱的別墅座落在環山路偶數號門牌的最後一棟，學數學的汀菱常使用數學語言自豪的說：「對邊所有門牌號碼的總和比我家門牌號碼還多出 323 號。」

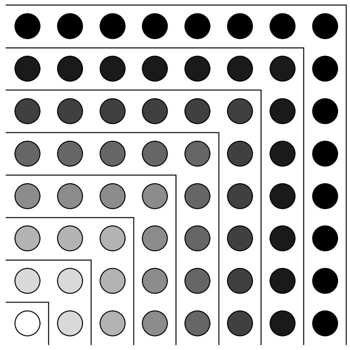
已知環山路兩邊的門牌號碼依 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 的次序編排，而且完全沒有跳號或漏號，求汀菱的別墅門牌號碼是幾號？

級數

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

可以透過等差級數的求和公式得到，也可以利用數學歸納法證明，甚至可以使用下圖的「無字證明」模式來詮釋：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$



談到「無字證明」，必須介紹尼爾森所寫的兩本無字證明的書（Proof Without Words Ⅰ & Ⅱ）。所謂的無字證明就是透過簡易的幾何規律，讓讀者相信或看出欲證明的式子是明顯成立的。當讀者還無法領悟時，只需少許的提示或解說就可以明白。想要達到這樣的神奇效果，必須有很簡易且巧妙的幾何圖形才辦得到。

透過這道級數和，應該不難算出汀菱家的門牌號碼。

動手玩數學

遊戲 **11**

☆

給定函數 $y = f(x)$ 及初始值 x_1，定義迭代數列 $\langle x_n \rangle$ 為

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad n \geq 2.$$

從迭代定義不難理解，迭代數列就是將所得到的函數值再當變數代入同一函數，得到的新函數值就是數列的下一項，重複這樣的步驟就會產生一個迭代數列。

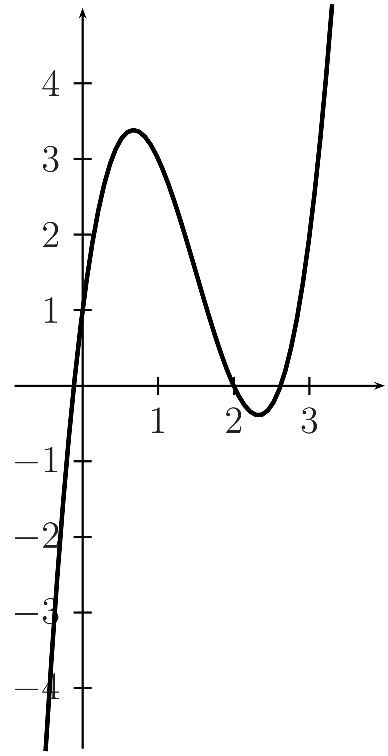
現在就讓我們來研究三次多項式函數

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{47}{6}x + 1$$

在初始值 $x_1 = 1$ 的情形下，所迭代出來的迭代數列 $\langle x_n \rangle$。

(1) 求 x_2, x_3 的值。

(2) 試著寫下一般項 x_n 的公式。



這個多項式是台北市敦化國中的時丕勳同學找到的，當時時同學已經取得我國參加國際奧林匹克數學競賽的國手資格。就在南港中央研究院數學所的培訓時，時同學幫我算出這個性質不錯的多項式。

將神秀大師的偈頌「身是菩提樹，心如明鏡台；時時勤拂拭，莫使惹塵埃」套用在數學學習上就是「動手算算，動腦想想，百益無害」。在這道多項式的問題上，除了有耐心的計算之外，別無他法，就算算看吧，將會有驚人的發現！

神秀大師的偈頌是一種按部就班，逐漸學習的法門，同時代六祖惠能的偈頌「菩提本無樹，明鏡亦非台；本來無一物，何處有塵埃」是更高深的一種頓悟。《動手玩數學》只是按部就班，循序漸進引導你學好數學而已，更高境界的頓悟，等我學會了再教你。

動手玩數學

遊戲 **12**

☆☆☆

根號數的化簡是一門很特別的學問，例如

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{13}{12}$$

是巧合，還是有特別的規律。如果有規律，那麼這規律又要如何去發現呢？就讓我們來試試看吧！

求根號數的和

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}.$$

數學問題的研究，有時將特例一般化會得到意想不到的結果。就以本遊戲為例，

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{13}{12}$$

是一個特例，它的一般化應該是去研究根號數

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

是否可以化成分數的情形？透過通分可以得到

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}&=\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}\\&=\frac{\sqrt{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

所以關鍵在於分子是否可以開出來？嘗試看看吧！

動手玩數學

遊戲 13

☆☆☆

設 n 是一正整數，而且多項式

$$f(x) = (1 + x + x^2)^n$$

展開式的升冪排列為

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}.$$

證明

$$a_0 + a_3 + a_6 + \cdots = a_1 + a_4 + a_7 + \cdots = a_2 + a_5 + a_8 + \cdots = 3^{n-1}.$$

這是台灣大學數學系九十五學年度學士班甄選入學，第二階段筆試試題的第一題。給定一個多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots .$$

我們經常使用函數值

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots$$

與

$$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

來玩索多項式 $f(x)$ 的係數 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$ 之間的關係。最常見的關係有

(0) 常數項係數 $a_0 = f(0)$。

(1) 所有係數和

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots = f(1).$$

(2) 偶次項係數和

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}.$$

(3) 奇次項係數和

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}.$$

大家有沒有想過，將變數 x 代特別值 1 與 -1 是如何想到的呢？除了 1 與 -1 之外，還有其它特別值可以產生這種神奇關係嗎？有沒有注意到 $x^2 = 1$ 的兩根就是 1 與 -1。

動手玩數學

遊戲 **14**

☆☆☆

在電視上看過心算比賽嗎？裁判將出題者出好的題目書寫在事先準備好的白紙上，比賽開始時，瞬間亮出題目，並要求選手在幾秒內算出正確答案。題目經常是很複雜的四則運算，有時還會有開根號之類的，常常觀眾題目還沒看完，選手已經算完了。

大陸的心算神童申克功算過一道很複雜的題目，當裁判亮出題目，觀眾只理解到題目是求

$$\sqrt[13]{13\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$$

這個開根號的數時（圓圈代表觀眾來不及記憶的數字），說時遲，那時快，申克功已經算出答案，並經裁判確認正確了。

申克功只花了十三秒就算出這個複雜的根式是一個正整數，你知道答案是多少嗎？〔參考數據 $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 7 \approx 0.8451, \log 13 \approx 1.1139$〕

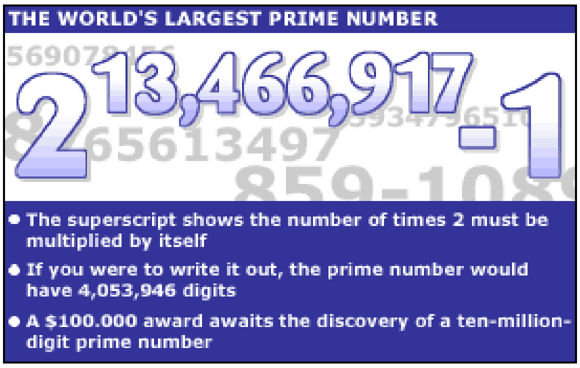
計算機（電腦）是現代人的計算利器，嚴格來講，應該是估算工具，因為大多數複雜的數學式子，計算器僅能提供近似值而已。在計算機（電腦）還沒發明之前，對數表就是扮演這個角色。雖然對數表已是昔日的計算利器，但是自然界裡仍然處處深受指數與對數函數的影響。這裡只是要你利用對數表來估算申克功心算的整數是多少而已。

動手玩數學

遊戲 **15**

☆☆

網際網路梅森質數搜索組織集合了相當多電腦的計算能力，主要任務就是不斷的篩選與尋找更大的質數。每位擁有電腦的個人都可以下載計算軟體並認養疑似質數的數字進行計算工作。例如，2001 年 12 月 7 日出爐的最大質數 $2^{13466917}-1$，它是由一位二十歲的加拿大學生發現的。 BBC 還特別做成底下的紀念看板：



Electronic Frontier 基金會提供十萬美元的獎金給發現超過 1000 萬位數字質數的人或團體。西元 2005 年 12 月 15 日美國密蘇里州立大學的兩位教授所帶領的一個團隊利用 700 多台電腦通過分散式運算發現了迄今為止（2006 年 3 月之前）最大的質數

$$2^{30402457}-1.$$

這兩位教授獲得 Electronic Frontier 基金會提供的十萬美元獎金了嗎？

西元前 350 年，希臘數學家歐基里德證明質數是無限的。此後，許多數學家曾對這種質數進行研究。而後在十七世紀，法國神父馬丁・梅森提出一個可能含有無數質數的數列 $\langle 2^p-1\rangle$。因此後人將 2^p-1 形式的質數稱為梅森質數。想要找到大的質數，從指數函數 2^p-1 下手是比較快速的，網際網路梅森質數搜索組織就是專找這類質數。下圖是網際網路梅森質數搜索組織網頁的首圖

在沒有計算器以前，對數表是用來估計比較大的數字的一種有效的計算武器，特別是天文與物理或數學上所產生的複雜數字，銀行的複利也需要借助對數表。就利用對數表來估計 $2^{30402457}-1$ 這個數字吧！

動手玩數學

遊戲 **16**

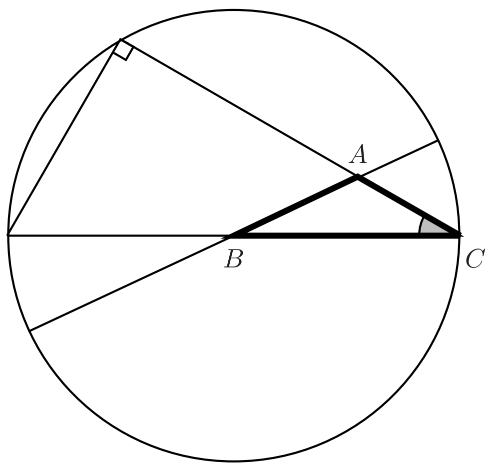
☆☆

給定三角形 ABC，邊長 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 與 $\overline{CA}$ 習慣以符號 c, a 與 b 表示，而角度 $\angle ACB$ 以符號 C 表示。在下圖中，以 B 為圓心，$\overline{BC} = a$ 為半徑畫一個圓，並將三角形 ABC 的三邊延長與此圓相交：

(1) 請將圖中所有的線段以符號 a, b, c 及 C 表示。

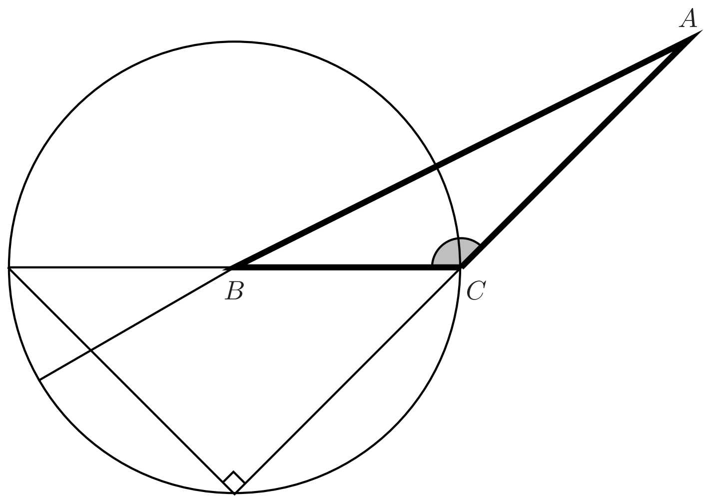
(2) 利用 (1) 的結果證明三角形 ABC 的餘弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



這是餘弦定理的眾多無字證明模型之一，需用到圓內冪性質。

當 C 是鈍角時，可以用下圖的模型證明餘弦定理，不妨試試看：

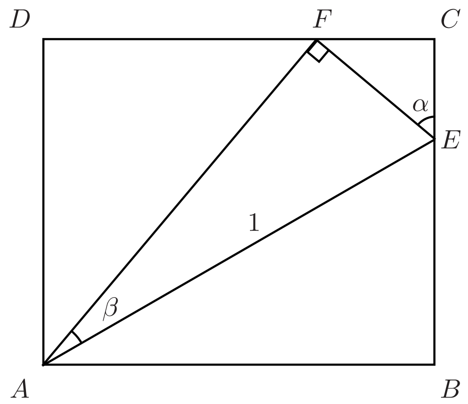


動手玩數學

遊戲 **17**

☆☆☆

在矩形 $ABCD$ 內畫一個直角三角形 AEF，其中 E 在 BC 邊上， F 在 CD 邊上，且 $\overline{AE}=1$，如下圖所示：



利用此圖形證明正弦與餘弦的和角公式，即證明

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

與

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

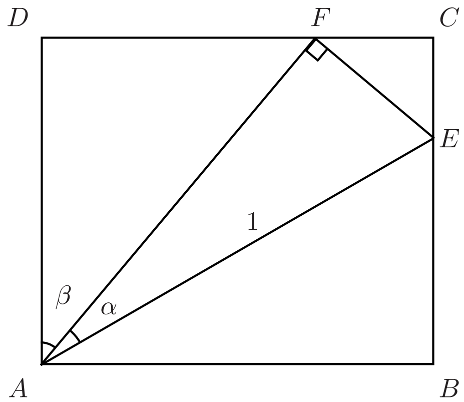
試著設計一個幾何圖形，並利用此圖形證明正弦與餘弦的另兩個和角公式，即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

與

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

這是和角公式的一個無字證明模型，只需將圖中每一個角度與每一條線段用 α 與 β 來表示，即可看出和角公式。至於另兩個和角公式可以考慮使用下圖：

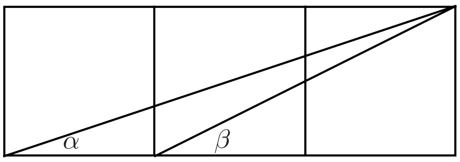


⊠

動手玩數學

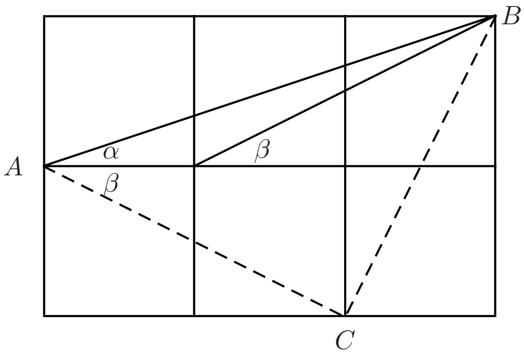
遊戲 18

在下圖中，求角度和 $\alpha+\beta$ 是一道很經典的幾何問題：

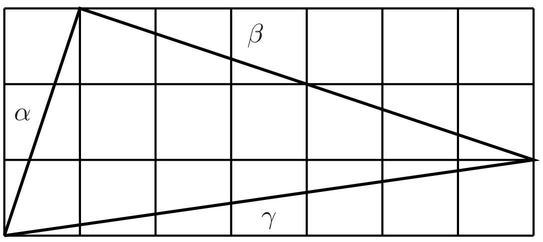


不用高中三角學的知識，可以透過作輔助線的方法，求得 $\alpha+\beta$ 的值。

例如，在下圖中，因為 $\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{5}, \overline{AB}=\sqrt{10}$，所以三角形 ABC 是等腰直角三角形，也就是說，$\alpha+\beta=45°$。



但是，如果是求下圖中的角度和 $\alpha+\beta+\gamma$，那麼上述的方法可能會施展不開。



試著想其它方法，求角度和 $\alpha+\beta+\gamma$ 的值。

我們提供一種不同的求角度和 $\alpha+\beta$ 的方法。利用複數的極式及主輻角的概念，我們可以將圖中的 α 與 β 分別想成複數 $3+i$ 與 $2+i$ 的主輻角，即

$$3+i=\sqrt{10}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$2+i=\sqrt{5}(\cos\beta+i\sin\beta).$$

將兩個複數相乘，得到

$$(3+i)(2+i)=5\sqrt{2}(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)).$$

又

$$(3+i)(2+i)=5+5i=5\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ),$$

故 $\alpha+\beta=45^\circ$。

試著利用複數的極式與主輻角的概念求 $\alpha+\beta+\gamma$ 的值。 ⊠