

將一個角三等分談何容易

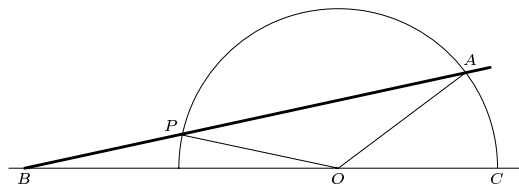
許志農

國立台灣師範大學數學系

December 21, 2006

三等分角問題是二千四百年前，古希臘人提出的幾何三大作圖問題之一，即用圓規與直尺把一任意角三等分。問題的難處在於作圖使用工具的限制，古希臘人要求幾何作圖只許使用直尺（沒有刻度，只能作直線的尺）和圓規。這三等分角問題曾吸引著許多人去研究，但都無一成功。在 1837 年，凡齊爾（P. L. Wantzel）運用代數方法證明了，這是一道尺規作圖的不可能問題，也就是說，很多角度（如給定 60° 角），在只能使用直尺及圓規的條件下，是不可能將它三等分的（即作出 20° 角來）。

後來人們還發現，只要放棄「尺規作圖」的戒律，三等分角並不是一個很難的問題。古希臘數學家阿基米德發現，只要在直尺上固定一點，使它在半圓圓弧上移動，問題就可解決了。

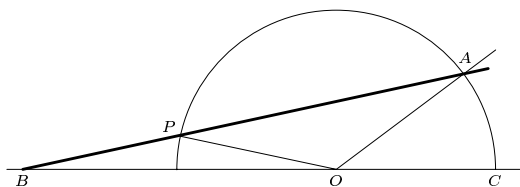


這裡的活動是要探討「非尺規三等分任意角問題」及「將幾個特別角三等分的問題」。

第一部份：阿基米德的方法

阿基米德想一個好方法來三等分任意角 $\angle AOC$ ，首先以 O 為圓心， OC 為半徑，畫一半圓，令此半圓交射線 \overrightarrow{OA} 於 A 點。再取

一長木棍，起點為 B ，並在木棍上取一點 P 使得 BP 與半圓的半徑等長。現在讓長木棍的起點 B 在射線 \overrightarrow{CO} 上移動，而點 P 在半圓圓弧上滑動。



如上圖所示：當長木棍與半圓相交於另一點為 A 時，阿基米德認為，此時的 $\angle PBO$ 剛好是 $\angle AOC$ 的三分之一。接下來請你完成阿基米德的這個推論：

- 1-1. 三角形 PBO 為何種三角形？可以由此推得何種角度關係？
- 1-2. 推導 $\angle OPA$ 與 $\angle PBO$ 的關係。
- 1-3. 三角形 POA 為何種三角形？可以由此推得何種角度關係？
- 1-4. 推導 $\angle OBP$ 與 $\angle OAP$ 的關係。
- 1-5. 證明

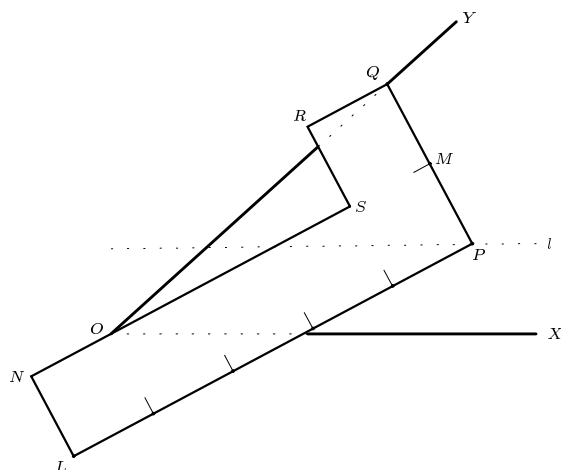
$$\angle AOC = 3\angle PBO.$$

第二部份：曲尺三等分角

有一種木匠用的”L型”曲尺，不僅可以直接畫直角，也可以用來三等分一個任意角。如下圖所示： $\angle XOY$ 是一個給定的任意角，”L型”曲尺的寬度 RQ 與 NL 都是單位長度，而且 $\angle RSN$ 與 $\angle QPL$ 都是直角。作圖如下：

- ① 畫虛線 l 使得 l 與直線 OX 平行，而且相距 1 單位長度；
- ② 讓曲尺的頂點 P 在直線 l 上移動；
- ③ 讓曲尺的角點 Q 在射線 \overrightarrow{OY} 上移動；

- ④ 當兩點移動到 O 落在曲尺內側邊線 NS 上時， $\angle XOY = 3\angle POX$ 。



接下來讓我們來證明 $\angle XOY = 3\angle POX$ ：

- 2-1. 直線 NS 通過哪些點？
- 2-2. OM 是三角形 POQ 的何種線？
- 2-3. 比較 $\angle QOM$ 與 $\angle POM$ 的大小。
- 2-4. 作 P 對線段 OX 的垂線 PH ，令垂足 H 。問：直角三角形 PHO 與 PMO 是否全等。
- 2-5. 推論 $\angle POX = \angle POM = \angle QOM$ 及 $\angle XOY = 3\angle POX$ 。

第三部份：歷史沿革

三等分任意角問題有兩個容易誤解的地方：

- (1) 尺規作圖工具只能使用沒有刻度的直尺及圓規，而直尺的功能只能畫畫通過兩個已構造出點的直線；圓規必須以已構造出點為圓心，已構造出兩點的距離為半徑畫圓。唯有這樣要求下，作出的點或角才算可尺規作圖。

(2) 三等分任意角的尺規作圖必須有一般性，不能提出僅可以三等分特別角的方法。

歷史上有許多號稱「三等分任意角是可尺規作圖」的創作，大多犯了上述兩個條件的迷思。底下是有關大陸一位號稱「三等分任意角可尺規作圖」的報導：

曾任貴州民族學院副院長的李得功，為了證明「三等分角問題」，自己發明所謂「比例弧定理」並號稱在這定理的使用之下，三等分任意角是可行的。因為「三等分任意角不可行」是早已被數學家認定為定理的原因，所以學者對李得功的作品毫無興趣。李得功不死心地向社會大眾提出如下的懸賞「凡在 2004 年 12 月 31 日前，第一個推翻他的截比例弧定理者，懸賞人民幣五萬元。」

最後引用中國數學家華羅庚在《三分角問題》這本書的一段話「確實說，用圓規和直尺三分任意角如步行上月亮一樣是不可能的。」

有關非尺規三等分任意角的問題，可以參考底下網站：

<http://mail.mcjh.kl.edu.tw/lo/geo3d/geo3d.htm>