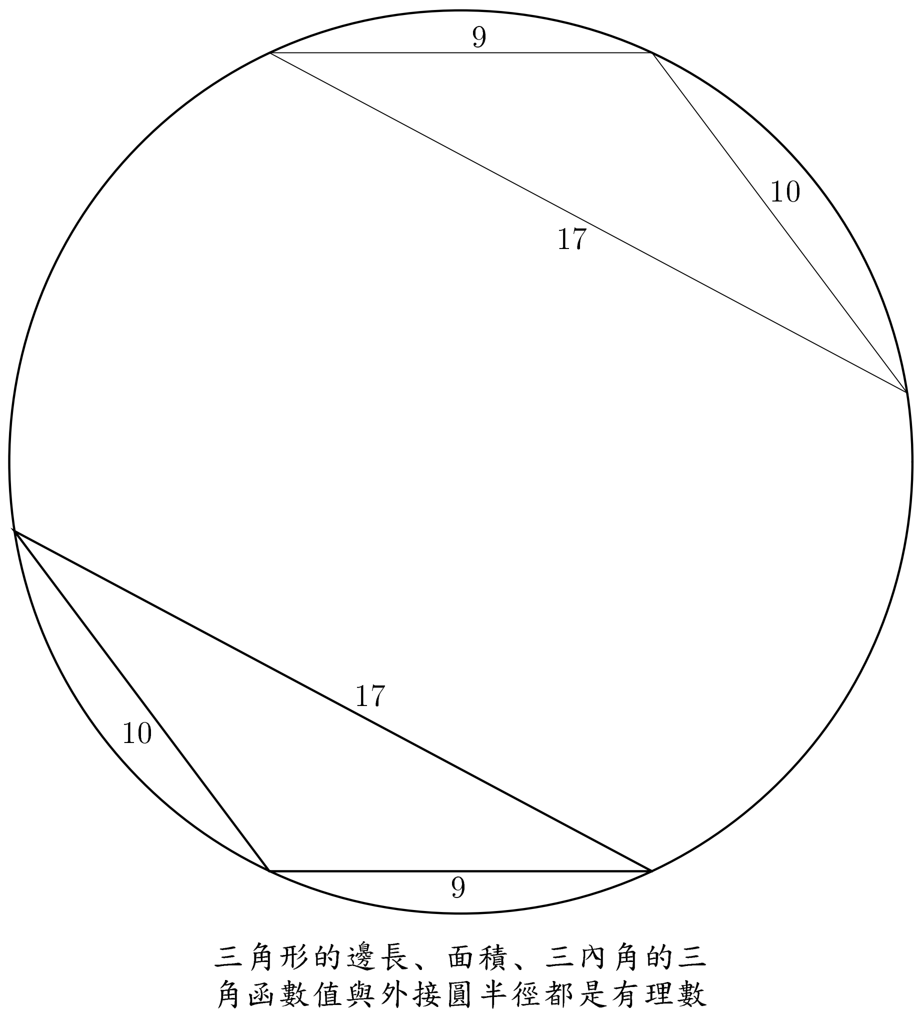
動手玩數學

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 21, 2006



三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數

遊戲 **1**

☆☆☆☆

一天夜裡，福爾摩斯正在書房看書，突然電燈熄滅了，原來是保險絲燒斷。福爾摩斯同時點燃了備用的兩根蠟燭，在燭光下繼續閱讀，直到電工把電燈修好。

第二天，他想看看昨晚斷了多長時間的電。但是，他當時沒有注意斷電的時間，也沒有注意是什麼時候來的電。於是他想透過瞭解點了多長時間的蠟燭來推斷斷電時間。他找來找去，怎麼也找不到點剩的蠟燭。後來僕人告訴他，燒剩的蠟燭一支長度是另一支的 4 倍。原本兩隻蠟燭都是新的，而且原來長短一樣，但粗細不同，粗的一支點完需 5 小時，細的一支點完要 4 小時。

請你根據上面的訊息推算福爾摩斯前一晚處在斷電的時間有多長？

這是大陸第三屆“希望杯”全國數學邀請賽的培訓題。培養對文字敘述很多的題目之閱讀與抓出數學要素的能力，是國中進入高中，甚至未來很重要的一種訓練。

遊戲 **2**

☆☆

一位父親臨終前就遺產分配給他的兒子留下遺囑：第一個兒子分得 100 萬元與剩下遺產的十分之一；第二個兒子分得 200 萬元與剩下遺產的十分之一；第三個兒子分得 300 萬元與剩下遺產的十分之一；…；以此類推，所有的兒子分得的錢數正好相等。

請問：這位父親共有多少遺產？每人分得多少錢？〔註：剩下是指將前面分過的財產扣除之後，所餘的財產〕

這是尤拉出給中學生作的數學趣題。旨在訓練學生假設未知數及建立方程式的關係之能力。

遊戲 **3**

☆☆

甲、乙、丙、丁、戊五名同學參加推鉛球比賽，通過抽籤決定出賽次序，在未公布順序前每人都對出賽順序進行了猜測。

甲猜：「乙第三，丙第五。」

乙猜：「戊第四，丁第五。」

丙猜：「甲第一，戊第四。」

丁猜：「丙第一，乙第二。」

戊猜：「甲第三，丁第四。」

老師說每人的出賽順序都至少被一人猜中。請依下列方法來確認五名同學的出賽次序：

(1) 依據題意製作一張表格來呈現五人的臆測。

(2) 根據這張表格，說明五名同學的出賽次序。

將資料或數據化繁為簡是進行數學思考的重要步驟，也是讓資料或數據說話的必經之門。簡化後的資料與數據比較容易進行演繹與邏輯推理。簡化資料與數據的方法有很多，將資料或數據用表格呈現是最常見的一種。在表格上看資料或數據有如在坐標平面上看幾何問題一樣，可以讓思緒清晰。

如果這道遊戲難不倒你，那麼再試試底下的問題：

甲、乙、丙、丁在一次數學比賽中囊括前四名。小華賣個關子請小明猜他們的得獎名次，小明猜「前四名依序為乙、甲、丁、丙」，小華說：「你連一個都沒猜中」；小明再猜「前四名依序為丁、丙、乙、甲」，小華說：「你還是連一個都沒猜中」；小明又猜「甲不是第三名」，小華說：「答對了！」；小明接著猜「丁的名次在乙的前面」，小華說：「又答對了！」。小明摸摸頭想了一下說：「我知道答案了」。問：前四名的次序為何？

遊戲 **4**

☆☆☆☆

阿基米德，歐幾里得，費馬與高斯參加一場四道題目的數學競賽。

阿基米德說：『第 1 題及第 4 題都沒答對。』

歐幾里得說：『第 4 題沒答對。』

費馬說：『答對第 1 題。』

高斯說：『答對第 4 題。』

四人各答對一題，而且每人答對的題目都不一樣。

已知四人中，三人說了實話，問誰答對第一題，又誰答對第四題？

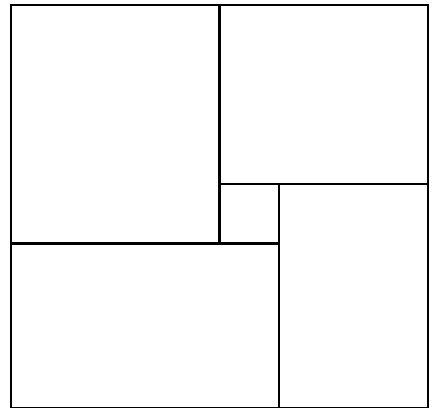
這是馬里蘭大學舉辦，高中數學競賽（第 26 屆）第二部份五個題目中的第一題。這是一道邏輯演繹與推理的問題，只是這道題目稍為複雜一點。不過，將所有可能情形討論一遍，必定可以找出答案。

動手玩數學

遊戲 5

☆☆☆☆

在下圖中，五個小矩形圍成一個大矩形。



如果相關位置不改變（即只允許調整小矩形的邊長大小），那麼可否將五個小矩形調整成五個正方形，但仍然圍成一個大矩形呢？

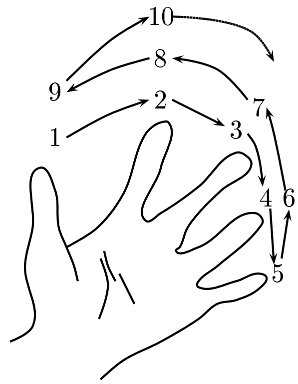
米開朗基羅正在做一座耶穌的塑像，有人跟他說“你的創造是偉大的”。他說“我什麼也沒有做，耶穌藏在這塊大理石裏面，我只是幫助他被釋放出來，他已經在那兒了，只是有超過了需要的大理石。有無關緊要的…我把那無關緊要的鑿去，我只是發現了他，我沒有創造他”。

畫家直接畫出人像或物體，就像直接推論出要證明的結果一樣，但是雕刻師傅採取相反的策略，他只是把不必要的大理石鑿開而已，就像去除所有錯誤的選項，正確的推論就呼之欲出了。因此直接證法由畫家的畫筆來擔綱，而反證法就委託雕刻師傅的刻刀演出了。 ☒

遊戲 **6**

☆☆

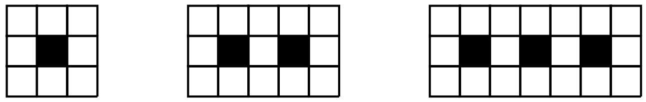
伸出你的左手，從大姆指開始，如下圖所示那樣數數字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$：



(1) 求大拇指所數的第 n 個數為何？並描述大拇指所數的數之規律。

(2) 數到 999 時，你數在那個手指上？

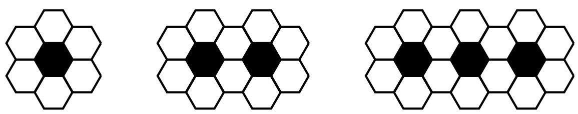
尋找規律或發現公式一直是數學活動中，很受重視的一環。例如九十五學年度學測第 G 題就是幾何規律的尋找問題：
用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 個　　第 2 個　　第 3 個

試問：拼第 95 個圖需用到 ㉗㉘㉙ 塊白色地磚。

又如下圖，求第 n 個圖的白色正六邊形個數，這也是一道尋找規律問題：



第 1 個　　第 2 個　　第 3 個

這道數數問題是取自第三屆《華羅庚金杯…少年數學邀請賽》的團體決賽口試試題。

遊戲 **7**

☆☆☆

古埃及《萊因德紙草書》裡談到「么分數」，像

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

這樣，分子為 1 的分數叫「么分數」。么分數是古埃及的基本單位，古埃及人經常將分數分解成若干個么分數的和，例如

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}; \qquad \frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}.$$

如果三個么分數

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{21}, \quad \frac{1}{b} \quad (a < b)$$

構成等差數列，那麼正整數 a 與 b 的值各為何？

1858年，蘇格蘭律師兼古董商萊因德，在往尼羅河谷的旅程中，購得一份幾年前才出土的文獻，這份文獻現在稱為「萊因德紙草書」，內容包含了八十四個數學問題，有關算術、簡單代數及幾何。由於萊因德三十歲時英年早逝，這批文獻於是落入大英博物館之手，成為永久館藏。不知道是什麼原因，古埃及人只知道用么分數來處理其他的分數，他們花了很多的工夫和技巧，將一個分數表達成許多么分數的和，例如將 $\frac{6}{10}$ 表示成 $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$。在這裡，我們使用算術（其實是正整數因數分解的技巧）驗證

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

是唯一的一組么分數表示法。

令 $\frac{2}{7}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\,(a<b)$，通分並交叉相乘後得到

$$2ab-7a-7b=0 \Rightarrow ab-\frac{7}{2}a-\frac{7}{2}b=0.$$

因式分解，得

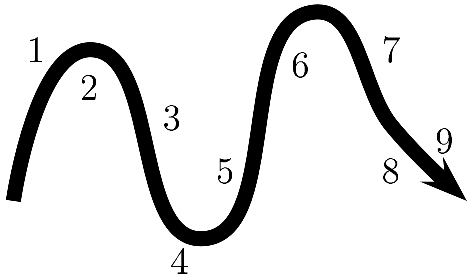
$$\left(a-\frac{7}{2}\right)\left(b-\frac{7}{2}\right)=\frac{7^2}{2^2} \Rightarrow (2a-7)(2b-7)=7^2.$$

利用正整數的因數分解及條件 $a<b$，得 $2a-7=1, 2b-7=49$，解得 $a=4, b=28$。 ⊠

遊戲 **8**

☆☆

一般街道門牌號碼的編碼原則是從 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 編起，奇數號門牌與偶數號門牌編在街道的不同邊。



汀菱的別墅座落在環山路偶數號門牌的最後一棟，學數學的汀菱常使用數學語言自豪的說：「對邊所有門牌號碼的總和比我家門牌號碼還多出 323 號。」

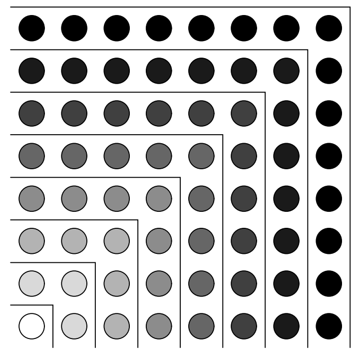
已知環山路兩邊的門牌號碼依 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 的次序編排，而且完全沒有跳號或漏號，求汀菱的別墅門牌號碼是幾號？

級數

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

可以透過等差級數的求和公式得到，也可以利用數學歸納法證明，甚至可以使用下圖的「無字證明」模式來詮釋：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$



談到「無字證明」，必須介紹尼爾森所寫的兩本無字證明的書（Proof Without Words Ⅰ & Ⅱ）。所謂的無字證明就是透過簡易的幾何規律，讓讀者相信或看出欲證明的式子是明顯成立的。當讀者還無法領悟時，只需少許的提示或解說就可以明白。想要達到這樣的神奇效果，必須有很簡易且巧妙的幾何圖形才辦得到。

透過這道級數和，應該不難算出汀菱家的門牌號碼。

遊戲 **9**

☆

給定函數 $y = f(x)$ 及初始值 x_1，定義迭代數列 $\langle x_n \rangle$ 為

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad n \geq 2.$$

從迭代定義不難理解，迭代數列就是將所得到的函數值再當變數代入同一函數，得到的新函數值就是數列的下一項，重複這樣的步驟就會產生一個迭代數列。

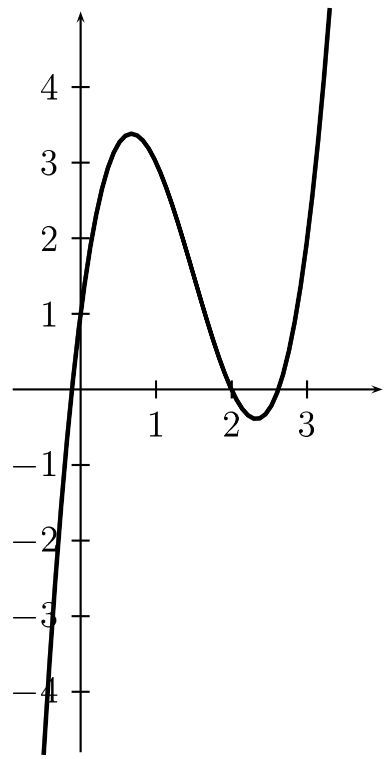
現在就讓我們來研究三次多項式函數

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{47}{6}x + 1$$

在初始值 $x_1 = 1$ 的情形下，所迭代出來的迭代數列 $\langle x_n \rangle$。

(1) 求 x_2, x_3 的值。

(2) 試著寫下一般項 x_n 的公式。



這個多項式是台北市敦化國中的時丕勳同學找到的，當時時同學已經取得我國參加國際奧林匹克數學競賽的國手資格。就在南港中央研究院數學所的培訓時，時同學幫我算出這個性質不錯的多項式。

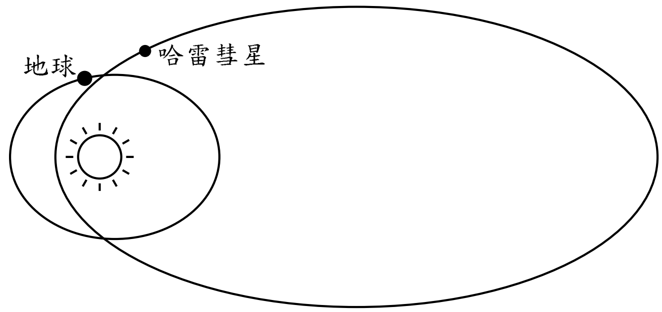
將神秀大師的偈頌「身是菩提樹，心如明鏡台；時時勤拂拭，莫使惹塵埃」套用在數學學習上就是「動手算算，動腦想想，百益無害」。在這道多項式的問題上，除了有耐心的計算之外，別無他法，就算算看吧，將會有驚人的發現！

神秀大師的偈頌是一種按部就班，逐漸學習的法門，同時代六祖惠能的偈頌「菩提本無樹，明鏡亦非台；本來無一物，何處有塵埃」是更高深的一種頓悟。《動手玩數學》只是按部就班，循序漸進引導你學好數學而已，更高境界的頓悟，等我學會了再教你。

遊戲 **10**

☆☆☆

愛德蒙・哈雷在他的好朋友艾薩克・牛頓的協助之下，成功地計算出一顆彗星（就是有名的哈雷彗星）將於 1758 年光臨地球，而且這是它在第十八世紀唯一的一次光臨，同時他們也算出下世紀也僅會光臨一次。



如果哈雷彗星的週期 P 剛好是整數年，而且第十八世紀是指西元 1701 年至西元 1800 年，那麼考慮以下四個問題：

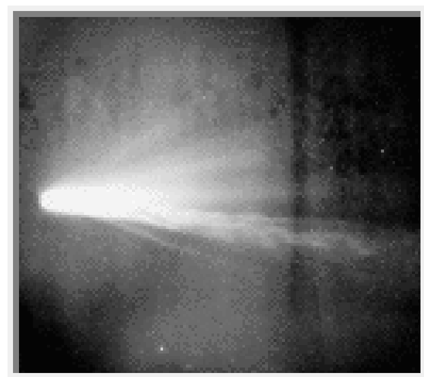
(1) 根據上述資料推論 $P \geq 72$。

(2) 中國的天文學家，在第十七世紀裡，一共觀測到哈雷彗星光臨地球兩次。試據此推論 $P \leq 78$。

(3) 事實上，中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久，翻開歷史記錄得知：此顆彗星在第十四世紀也是光臨地球兩次；但是在第十一及十二世紀時，哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已。你是否能根據這些資料，列舉出哪些從 (1) 及 (2) 所得到的 P 值是不合的，並算出哈雷彗星的真正週期？

(4) 西元幾年哈雷彗星才會再度光臨地球？

中國南北朝數學家祖沖之說：「遲疾之律，非出神怪，有形可檢，有數可推。」大意是說：「天體運行的規律，不是什麼神怪、不可捉摸的東西，而是有形體可供觀察檢驗，且有數據可以計算推測的。」天體（太陽、地球、彗星等）運行是有週期性的，而且可以量化，並用科學方法得到的！有關哈雷彗星最先和最完備的紀錄皆來自中國，據朱文鑫《天文考古錄》考證：自秦始皇七年（公元前 240 年）至清宣統二年（1910 年）共有 29 次記錄，並符合計算結果。



直線是最容易瞭解的幾何圖形，在直線上面刻記或畫點就變成了代數的數線。有了可以紀錄的數線之後，人類的歷史可以在上面有相對應的點，星體運行時間表也可以記錄在這條無止境的數線上。人一生中的酸甜苦辣可以用立體的臉部皺紋寫實，亦可用平面的日記來描述，但也可以讓它簡單的刻畫在生命的這條一維數線上。善用數線上的一些關鍵點，可以讓我們省事不少。