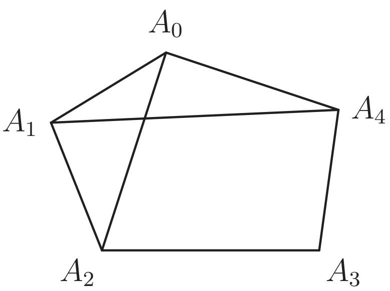
站在高斯這位巨人的肩膀上

許志農
國立台灣師範大學數學系

July 17, 2006



「稀少，但成熟」是數學家高斯研究學問的準繩。對於高斯，最膾炙人口且被廣為流傳的，莫過於算是他的第一個算術定理

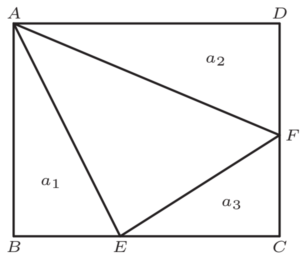
$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050.$$

「站在巨人的肩上，可以看得更遠；來自巨人的投射，可以照得更亮」是學數學的人渴望有的際遇，想要獲得的加持；但是，巨人的肩膀容易攀爬嗎？巨人的 "數光" 會普照在每個人身上嗎？
高斯五邊形面積公式說：「給定任意五邊形，相鄰三個頂點所形成的三角形稱為基本三角形，一共有五個基本三角形。高斯證明：五邊形的面積可以用這五個基本三角形的面積來表示。」事實上，這五邊形的面積恰好是以基本三角形面積為係數的二次方程式之一根。（左圖為高斯圖像）

這個活動是在談論一道與矩形有關的面積問題，巧的是，這問題與二次方程式的根扯上關係。也可以說，跟高斯的五邊形面積公式有異曲同工之妙。

第一部份：橫看成嶺，側成峰；長、寬轉換各不同

如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 S 的矩形，a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



1-1. 將四線段 CE, CF, CB, CD 的乘積 $CE \cdot CF \cdot CB \cdot CD$ 以符號 S, a_3 表示。

1-2. 將四線段 CE, CF, CB, CD 的乘積 $CE \cdot CD \cdot CB \cdot CF$ 以符號 S, a_1, a_2 表示。

1-3. 證明

$$S^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3)S + 4a_1a_2 = 0.$$

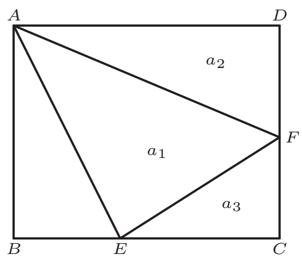
1-4. 將 S 表為 a_1, a_2, a_3 的公式。

1-5. 將三角形 AEF 的面積用符號 a_1, a_2, a_3 表示。

1-6. 已知 $a_1 = 12, a_2 = 12, a_3 = 6$，求三角形 AEF 的面積。

第二部份：改變一下如何？

$ABCD$ 是面積為 S 的矩形，a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積：



2-1. 將四線段 CE, CF, CB, CD 的乘積 $CE \cdot CF \cdot CB \cdot CD$ 以符號 S, a_3 表示。

2-2. 將四線段 CE, CF, CB, CD 的乘積 $CE \cdot CD \cdot CB \cdot CF$ 以符號 S, a_1, a_2, a_3 表示。

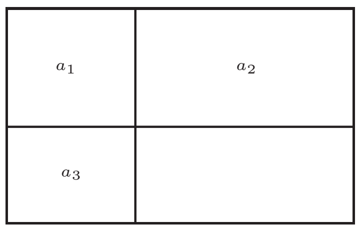
2-3. 證明

$$S^2 - 2(a_1 + 2a_2)S + 4a_2(a_1 + a_2 + a_3) = 0.$$

2-4. 將 S 表為 a_1, a_2, a_3 的公式。

2-5. 將三角形 ABE 的面積用符號 a_1, a_2, a_3 表示。

2-6. 如下圖所示，面積為 A 的大矩形，被分割成四個小矩形，其中 a_1, a_2, a_3 為所在小矩形區域的面積。



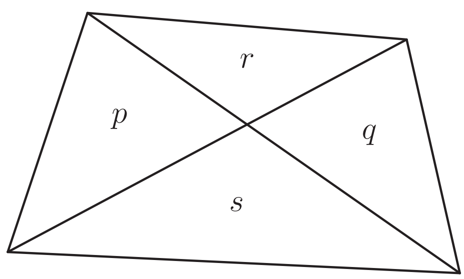
證明

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_2 a_3}{a_1}.$$

2-7. 承 2-6，利用算幾不等式證明

$$A \geq 2\sqrt{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}.$$

2-8. 如下圖所示



任意凸四邊形的對角線將此四邊形分割成四塊三角形，其面積分別為 p,q,r,s。證明

$$pq = rs.$$

第三部份：歷史沿革

設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 為凸五邊形，三角形 $A_4A_0A_1$ 的面積為 a_0， $A_0A_1A_2$ 的面積為 a_1， $A_1A_2A_3$ 的面積為 a_2， $A_2A_3A_4$ 的面積為 a_3， $A_3A_4A_0$ 的面積為 a_4。高斯證明五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積 A 可以表成 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 的公式， 這就是有名的高斯五邊形面積公式：

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \\ c_2 &= a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0. \end{aligned}$$