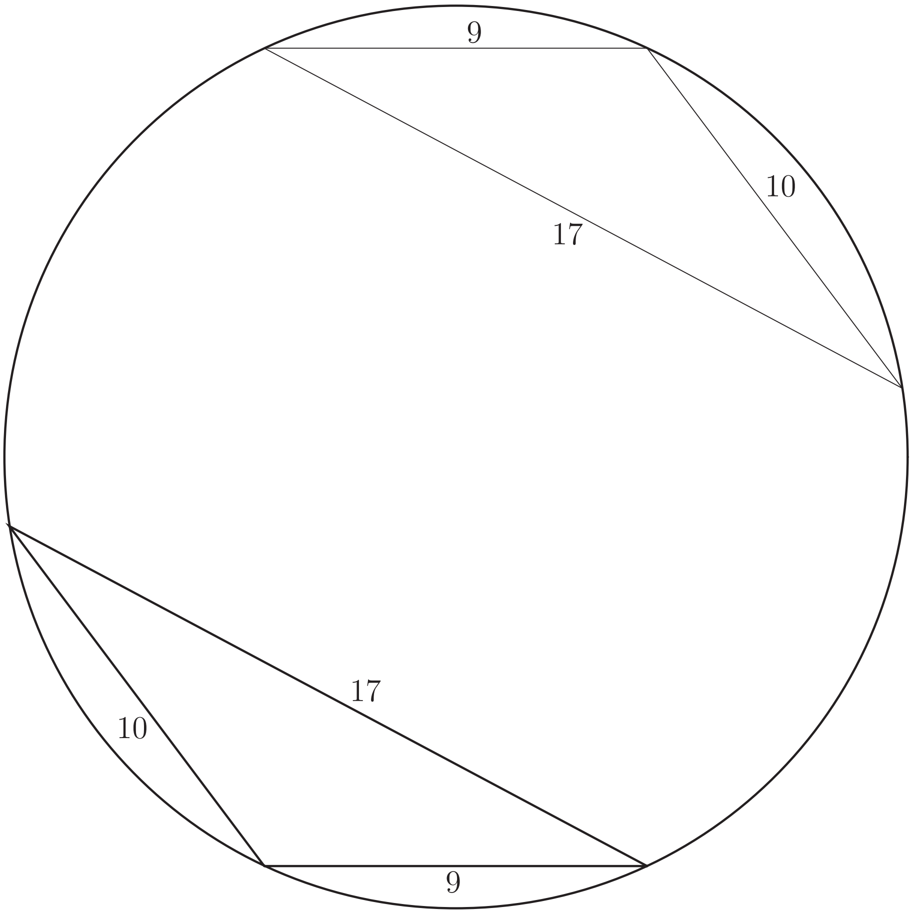
動手玩數學

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

June 29, 2006



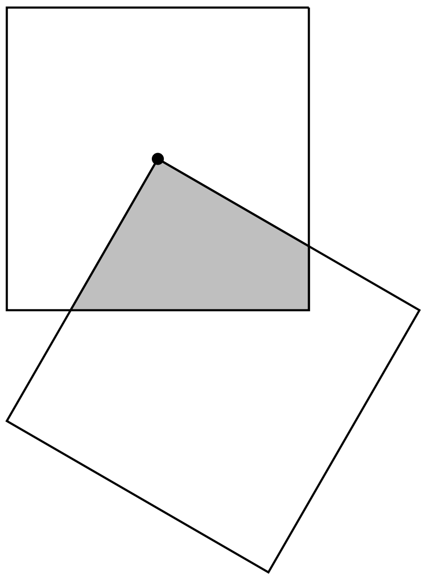
三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數

動手玩數學

遊戲 **1**

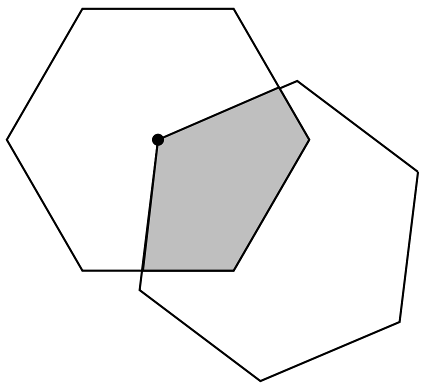
☆

如下圖所示，在邊長為 4 的正方形木板之中心定一支丁子，並將同樣大小的另一個正方形木板掛上，其中灰色區域是兩塊木板的重疊區域。
求重疊的灰色區域面積，並回答這面積是否與掛的角度有關。



國中教過的平面幾何圖形有三角形（含正三角形，等腰三角形，直角三角形）、四邊形（含矩形，正方形，菱形，梯形，平行四邊形）、五邊形、…多邊形等不一而足。然而，三角形是整個平面幾何圖形的根本，很多問題都是從三角形看出答案或者作輔助線將問題簡約成三角形的問題。也因為這樣，中學會學過許許多多有關三角形的性質或定理。國中時期主要專注在三角形的全等與相似或直角三角形的邊長關係。高中會教一些更高等的幾何定理。只要善用這些性質，很多平面幾何問題都可以迎刃而解。

當你會了這問題之後，不妨將正方形木板推廣到正六邊形的情形：



比較深入的研究問題是：哪些正多邊形的木板會產生像本問題這樣良好的性質。

動手玩數學

遊戲 **2**

☆☆☆☆☆

設 a, b 是正實數，而且

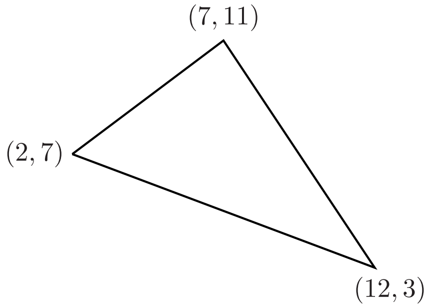
$$\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{4a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2+4b^2}$$

是一個三角形的三邊邊長。

(1) 設計一個矩形，使得上述三邊長的三角形之三個頂點剛好落在此矩形的邊線上。（必須說出矩形的長、寬及三個頂點所分割出的各條線段之長度）

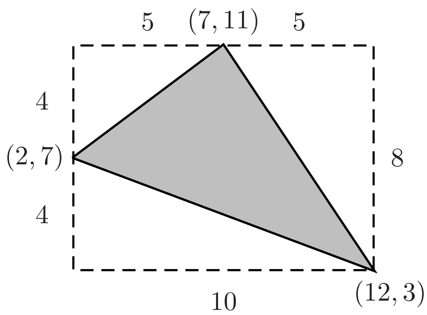
(2) 利用所設計的矩形，求上述三角形的面積。（以 a, b 表示）

談到三角形，角度、邊長與面積是經常要處理的三個基本量。如下圖所示，頂點坐標為 $(2,7),(12,3)$ 與 $(7,11)$ 的三角形，邊長可以利用兩點間的距離公式求得，面積可以透過一種稱為「補東補西補成好東西」的方法來計算：



分別在三角形的三邊補上直角三角形，如下圖所示，讓三角形好像裹在一個矩形內一樣。這時三角形的面積就是矩形面積扣掉三個直角三角形的面積，即

$$\text{三角形的面積} = 10\cdot 8 - \frac{1}{2}(10\cdot 4 + 8\cdot 5 + 5\cdot 4) = 30.$$



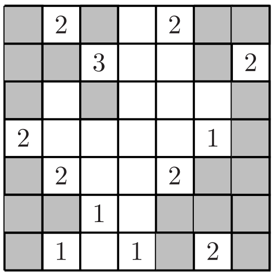
試著利用「補東補西補成好東西」的方法來完成這道問題。

動　手
玩
數　學

遊戲 **3**

☆☆

微軟電腦軟體的遊樂場有一種叫「踩地雷」的遊戲，相信大部分的人都玩過。如下圖所示，白色區域是已探勘沒有地雷的區域，數字代表該區域的四周灰色地帶所佈的地雷數，而且每塊灰色區域至多佈一顆地雷。



(1) 總共佈幾顆地雷。

(2) 可以精確確認每顆地雷所佈的位置嗎？

每個年齡層有不同的數學觀念要學習，甚至有些人會額外的補強一些學校不教的課程。例如，有些國小的學生會學習心算，增強計算的速度與能力；上了年紀的人，為了怕頭腦退化，會作一種叫「數獨」的填數字遊戲。這些額外的學習經常印證金剛經所說的「一切有為法，如夢幻泡影。」大都船過水無痕，沒辦法在數學的學習之旅上起大作用。所以慎選有為法（可以起作用的學習方法）是相當重要的。

這道「踩地雷」遊戲就是為國、高中數學能力的銜接而設計的。國中升高中的學生需要加強那些數學能力呢？邏輯推理可能是首選，「踩地雷」遊戲就屬於這種訓練的一環。

動手玩數學

遊戲 4

☆☆☆

懷特海是英國數理邏輯學家，曾執教於劍橋大學與牛津大學。下面是他給他的學生出的一道題目：

甲、乙、丙三人各有硬幣若干枚。甲將自己的部份硬幣分給乙、丙，使他們的硬幣各增長了一倍；之後，乙將自己的部份硬幣分給甲、丙，使他們的硬幣各增長了一倍；最後，丙將自己的部份硬幣分給甲、乙，使他們的硬幣各增長了一倍。經過這樣三次的重新分配之後，三人的硬幣都是 8 枚。請問他們原來各有硬幣多少枚？

當警察懷疑某嫌疑犯是小偷時，嫌疑犯猛喊「冤枉」可能不是明智之舉。比較合理的方式是暫時承認自己就是那個小偷，然後再逆向思考找出破綻，洗刷自己的清白。這種「逆向思考」在日常生活中廣泛被使用。在數學邏輯推理的語言上，「逆向思考」就是所謂的「反證法」。雖然國中不教反證法，但是偶而會用到「倒推回去」的思考模式。這種倒推回去的思考就是為將來的反證法所做的伏筆。

動手玩數學

遊戲 **5**

☆

紙張的尺寸分為國際標準組織尺寸和我國慣用尺寸兩種，而國內通用尺寸主要有「菊版紙」與「四六版紙」兩大類。若依面積來說，則最大的紙張稱為全開，其次有 2 開，3 開，4 開，⋯，128 開等的對應紙張。菊版紙的全開是 25×35（以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開（有時稱對開），3 開，4 開，8 開，12 開，16 開， 20 開的大小列表如下圖所示。

開數 \ 規格	英吋
全開	25×35
2 開	$25 \times 17\frac{1}{2}$
3 開	$25 \times 11\frac{2}{3}$
4 開	$12\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$
8 開	$12\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{4}$
12 開	$8\frac{1}{3} \times 8\frac{3}{4}$
16 開	$6\frac{1}{4} \times 8\frac{3}{4}$
20 開	$6\frac{1}{4} \times 7$

利用正整數因數分解的知識，對各種菊版紙的尺寸給個數學公式，又某人訂做名片，經計算得知名片的面積是 12.5 平方英吋，若該名片是採菊版紙製作，則此人的名片是幾開菊版紙。

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》多選題第 11 題就是這遊戲的最好提示：

將正整數 18 分解成兩個正整數的乘積有

$$1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6$$

三種，又 3×6 是這三種分解中，兩數的差最小的，我們稱 3×6 為 18 的最佳分解。當 $p \times q (p \leq q)$ 是正整數 n 的最佳分解時，我們規定函數 $F(n) = \frac{p}{q}$，例如 $F(18) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$。

下列有關函數 $F(n)$ 的敘述，何者正確？

(1) $F(4) = 1$。

(2) $F(24) = \frac{3}{8}$。

(3) $F(27) = \frac{1}{3}$。

(4) 若 n 是一個質數，則 $F(n) = \frac{1}{n}$。

(5) 若 n 是一個完全平方數，則 $F(n) = 1$。

動手玩數學

遊戲 **6**

☆☆

設 abc 是一個三位數的正整數。我們都知道

(1) abc 是否為偶數，只需判斷 c 是否為偶數即可。

(2) abc 是否為 3 的倍數，只需判斷 $a+b+c$ 是否為 3 的倍數即可。

(3) abc 是否為 9 的倍數，只需判斷 $a+b+c$ 是否為 9 的倍數即可。

(4) abc 是否為 11 的倍數，只需判斷 $a-b+c$ 是否為 11 的倍數即可。

除了這四個之外，相信很多人也記得 5 的倍數與 13 的倍數之判別方法。但是，你會 19 的倍數之判別方法嗎？請你檢驗底下的判別方法：

$$19|abc \Leftrightarrow 19|(10a+b+2c),$$

也就是說，abc 是否為 19 的倍數，只需判斷 $10a+b+2c$ 是否為 19 的倍數即可。

判斷一個大的數是否為某數的倍數之判別方法是學習整數性質相重要的一環。上述判別 $2, 3, 9, 11, 13$ 的倍數判別法不僅對三位數正整數適用，還可以推廣到一般的情形。關於這些判別方法的推理或證明，都需要用到整數的一個相當重要之除法性質：

$$d|a,\ d|b \Rightarrow d|(am+bn).$$

有關 19 倍數的判別法可以推廣為：$n+1$ 位的正整數

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

是 19 的倍數之判別方法為

$$10a_n + 2^0 a_{n-1} + 2^1 a_{n-2} + \cdots + 2^{n-2} a_1 + 2^{n-1} a_0$$

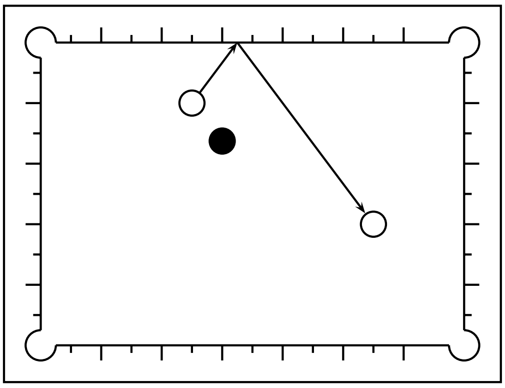
也是 19 的倍數。看了這個神奇的判別方法後，關於其它數的倍數判別方法，你有辦法挖掘嗎？

動手玩數學

遊戲 **7**

☆☆☆

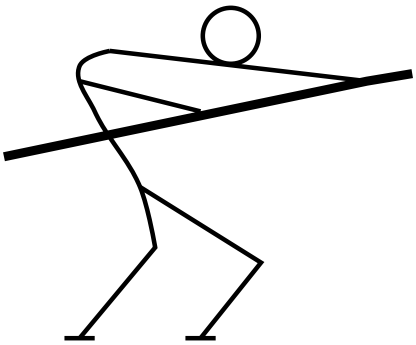
看過我國十六歲泰山神童吳珈慶打撞球嗎？當標的球被黑球擋住去路時，跳球（越過黑球上空）或間接擊球（碰撞檯邊再反射撞球）是常用的兩種擊球方法。

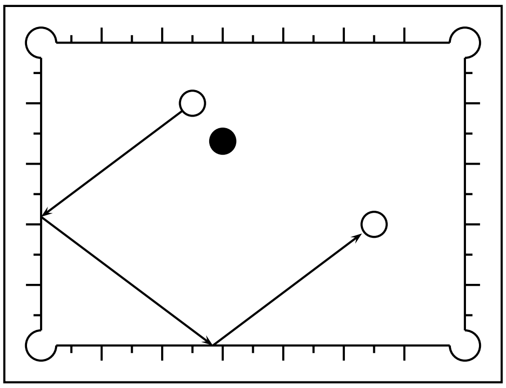


例如，在上圖中，想用白球撞擊另一顆箭頭所指的白球。因為黑球橫在中間，無法直接瞄準，所以借助球台邊的反射，是一招不錯的方式，但是，這時的瞄準點比較難拿捏，球在撞擊之前所跑的距離也跟著加長，失誤的機率提升不少。

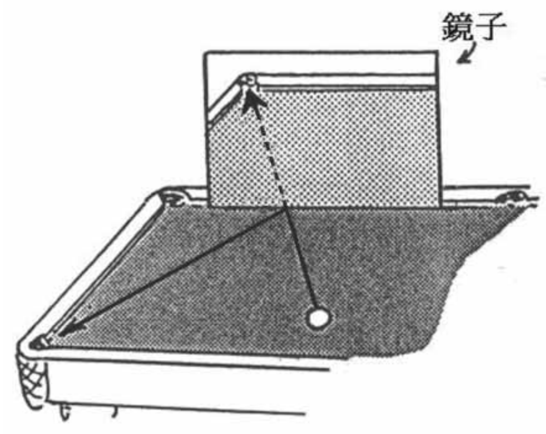
(1) 在上圖中，白球依實線方向前進，在碰到另一顆白球之前，總共走了多少距離（將球台邊相鄰兩長刻度的距離稱為 1 單位，答案以單位表示）。

(2) 如果想表現一下高超的撞球技術，採取下圖中的實線撞球，那麼在碰到另一顆白球之前，總共行經了多少距離。

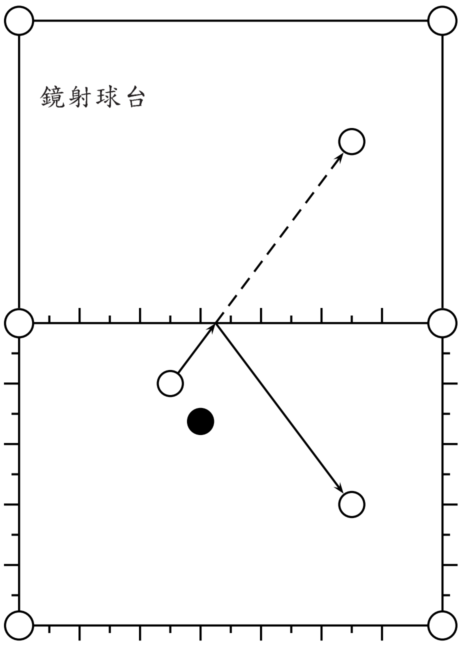




撞球最重要的物理性質就是入射角等於反射角，這個性質也可以用光學的物理性質來解釋，如下圖所示，在球台邊裝個鏡子，此時球行進的折線可以看成直線（跑進鏡子裡的球台）。



利用入射角等於反射角的鏡射原理，將折線拉直，如下圖所示（想成將球台往上作對稱）



應用這個概念，將折線一一拉直便可解題。 ☒

動手玩數學

遊戲 8

☆☆☆

泰雅族女子在十三、四歲的時候，就開始跟著母親學習織布的技巧，也開始為自己準備出嫁時的衣裳。今有一泰雅族女子善於織布，織得很快，織的尺數成如下的規律增加：第 1 個月織 14 尺；第 2 個月比第 1 個月的 1.5 倍還多 1 尺；第 3 個月比第 2 個月的 1.5 倍還多 1 尺；⋯等。

(1) 此泰雅族女子第 5 個月織幾尺。

(2) 如果前 n 個月都以這樣的規律增加，那麼第 n 個月該女子織布幾尺（以 n 表示）。

在《張丘建算經》上，等差級數是書中一項重要內容，例如

(a) 某女子善於織布，一天比一天織得快，而每天增加的數量都一樣。已知第一日織 5 尺，30 日共織 930 尺，求每日比前一日多織多少？

(b) 有一女子不善織布，逐日所織布按日遞減，已知第一日織 5 尺，最後一日織 1 尺，共織了 30 日，問共織布多少？

如果把 (1) 中第 n 日織布長度設為 a_n 尺，那麼不難推得 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_n = a_{n-1} + 3. \tag{1}$$

至於等比級數，在《莊子・天下篇》中說過：「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」這段反映古人對下列無窮級數和結果的思想

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

如果把第 n 日截取的竿長設為 a_n 尺，那麼不難推得 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2}. \tag{2}$$

滿足關係式 (1) 的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為等差數列，而滿足關係式 (2) 的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為等比數列。等差與等比數列是歷史悠久，且極為重要的數列，這兩種數列可以求得一般項 a_n 的公式。

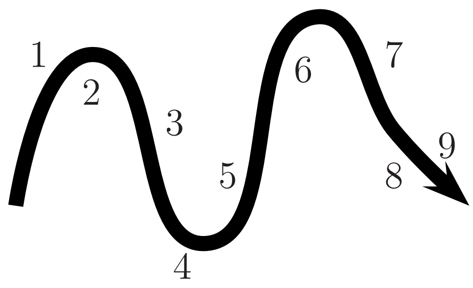
本遊戲是模仿《張丘建算經》中的問題而來，令 a_n 為該女子第 n 個月織布尺數，試著寫下 a_n 與 a_{n-1} 所滿足的關係式，並想辦法求得一般項 a_n 的公式。

動手玩數學

遊戲 9

☆☆

一般街道門牌號碼的編碼原則是從 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 編起，奇數號門牌與偶數號門牌編在街道的不同邊。



汀菱的別墅座落在環山路偶數號門牌的最後一棟，學數學的汀菱常使用數學語言自豪的說：「對邊所有門牌號碼的總和比我家門牌號碼還多出 323 號。」

已知環山路兩邊的門牌號碼依 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 的次序編排，而且完全沒有跳號或漏號，求汀菱的別墅門牌號碼是幾號？

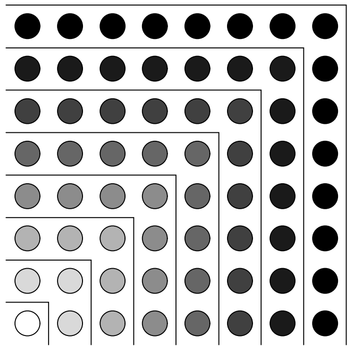
玩鎖・玩索

級數

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

可以透過等差級數的求和公式得到，也可以利用數學歸納法證明，甚至可以使用下圖的「無字證明」模式來詮釋：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$



談到「無字證明」，必須介紹尼爾森所寫的兩本無字證明的書（Proof Without Words Ⅰ&Ⅱ）。所謂的無字證明就是透過簡易的幾何規律，讓讀者相信或看出欲證明的式子是明顯成立的。當讀者還無法領悟時，只需少許的提示或解說就可以明白。想要達到這樣的神奇效果，必須有很簡易且巧妙的幾何圖形才辦得到。

透過這道級數和，應該不難算出汀菱家的門牌號碼。

動手玩數學

遊戲 10

☆

給定函數 $y=f(x)$ 及初始值 x_1，定義迭代數列 $\langle x_n\rangle$ 為

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad n \geq 2.$$

從迭代定義不難理解，迭代數列就是將所得到的函數值再當變數代入同一函數，得到的新函數值就是數列的下一項，重複這樣的步驟就會產生一個迭代數列。

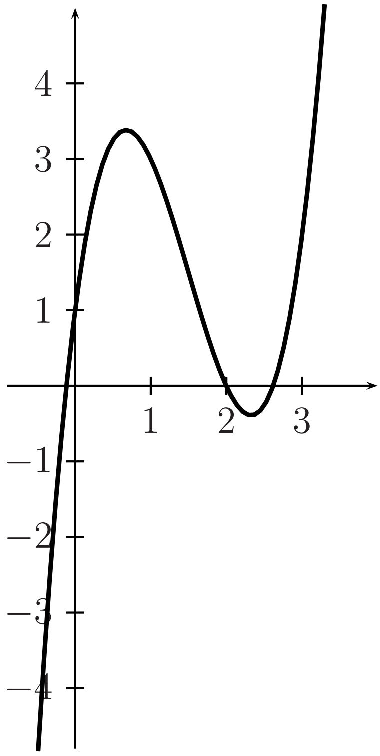
現在就讓我們來研究三次多項式函數

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{47}{6}x + 1$$

在初始值 $x_1 = 1$ 的情形下，所迭代出來的迭代數列 $\langle x_n\rangle$。

(1) 求 x_2, x_3 的值。

(2) 試著寫下一般項 x_n 的公式。



這個多項式是台北市敦化國中的時丕勳同學找到的，當時時同學已經取得我國參加國際奧林匹克數學競賽的國手資格。就在南港中央研究院數學所的培訓時，時同學幫我算出這個性質不錯的多項式。

將神秀大師的偈頌「身是菩提樹，心如明鏡台；時時勤拂拭，莫使惹塵埃」套用在數學學習上就是「動手算算，動腦想想，百益無害」。在這道多項式的問題上，除了有耐心的計算之外，別無他法，就算算看吧，將會有驚人的發現！

神秀大師的偈頌是一種按部就班，逐漸學習的法門，同時代六祖惠能的偈頌「菩提本無樹，明鏡亦非台；本來無一物，何處有塵埃」是更高深的一種頓悟。《動手玩數學》只是按部就班，循序漸進引導你學好數學而已，更高境界的頓悟，等我學會了再教你。

動手玩數學

遊戲 **11**

☆☆☆

根號數的化簡是一門很特別的學問，例如

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{13}{12}$$

是巧合，還是有特別的規律。如果有規律，那麼這規律又要如何去發現呢？就讓我們來試試看吧！

求根號數的和

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}.$$

數學問題的研究，有時將特例一般化會得到意想不到的結果。就以本遊戲為例，

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{13}{12}$$

是一個特例，它的一般化應該是去研究根號數

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

是否可以化成分數的情形？透過通分可以得到

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}&=\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}\\&=\frac{\sqrt{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

所以關鍵在於分子是否可以開出來？嘗試看看吧！

動手玩數學

遊戲 **12**

☆☆☆

在電視上看過心算比賽嗎？裁判將出題者出好的題目書寫在事先準備好的白紙上，比賽開始時，瞬間亮出題目，並要求選手在幾秒內算出正確答案。題目經常是很複雜的四則運算，有時還會有開根號之類的，常常觀眾題目還沒看完，選手已經算完了。

大陸的心算神童申克功算過一道很複雜的題目，當裁判亮出題目，觀眾只理解到題目是求

$$\sqrt[13]{13\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$$

這個開根號的數時（圓圈代表觀眾來不及記憶的數字），說時遲，那時快，申克功已經算出答案，並經裁判確認正確了。

申克功只花了十三秒就算出這個複雜的根式是一個正整數，你知道答案是多少嗎？〔參考數據 $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 7 \approx 0.8451, \log 13 \approx 1.1139$〕

計算機（電腦）是現代人的計算利器，嚴格來講，應該是估算工具，因為大多數複雜的數學式子，計算器僅能提供近似值而已。在計算機（電腦）還沒發明之前，對數表就是扮演這個角色。雖然對數表已是昔日的計算利器，但是自然界裡仍然處處深受指數與對數函數的影響。這裡只是要你利用對數表來估算申克功心算的整數是多少而已。

動手玩數學

遊戲 **13**

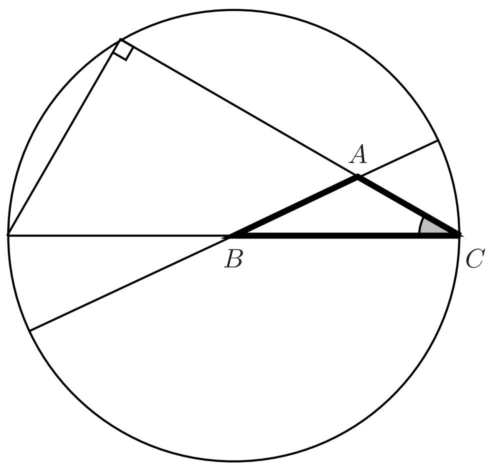
☆☆

給定三角形 ABC，邊長 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 與 $\overline{CA}$ 習慣以符號 c, a 與 b 表示，而角度 $\angle ACB$ 以符號 C 表示。在下圖中，以 B 為圓心，$\overline{BC} = a$ 為半徑畫一個圓，並將三角形 ABC 的三邊延長與此圓相交：

(1) 請將圖中所有的線段以符號 a, b, c 及 C 表示。

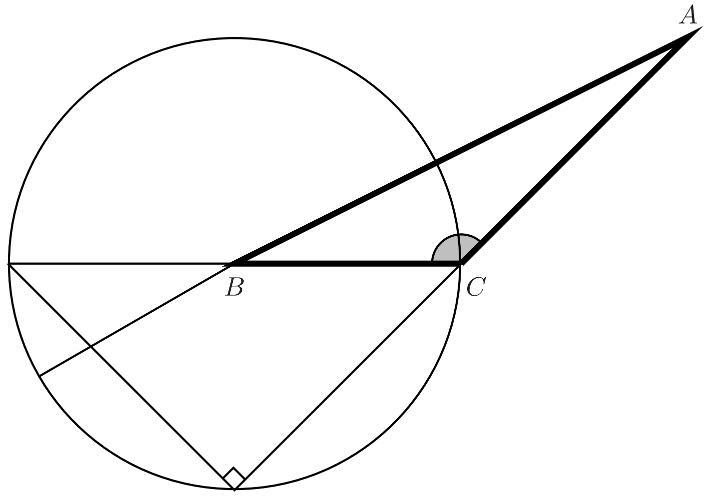
(2) 利用 (1) 的結果證明三角形 ABC 的餘弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



這是餘弦定理的眾多無字證明模型之一，需用到圓內冪性質。

當 C 是鈍角時，可以用下圖的模型證明餘弦定理，不妨試試看：

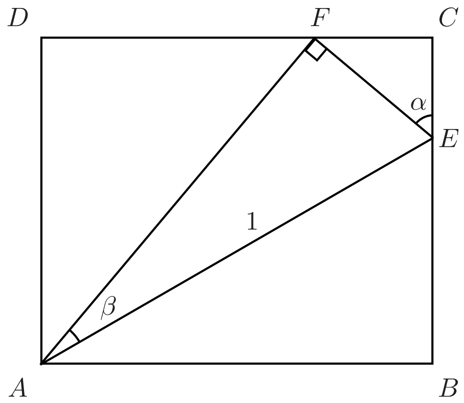


動手玩數學

遊戲 **14**

☆☆☆

在矩形 $ABCD$ 內畫一個直角三角形 AEF，其中 E 在 BC 邊上， F 在 CD 邊上，且 $\overline{AE}=1$，如下圖所示：



利用此圖形證明正弦與餘弦的和角公式，即證明

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

與

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

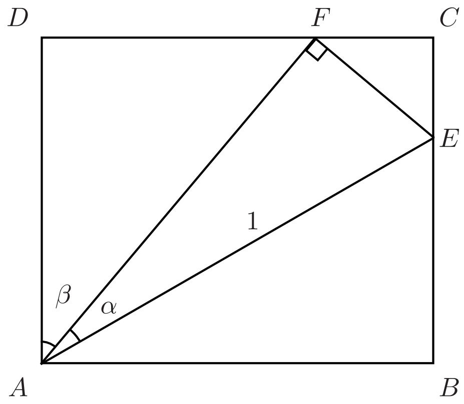
試著設計一個幾何圖形，並利用此圖形證明正弦與餘弦的另兩個和角公式，即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

與

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

這是和角公式的一個無字證明模型，只需將圖中每一個角度與每一條線段用 α 與 β 來表示，即可看出和角公式。至於另兩個和角公式可以考慮使用下圖：



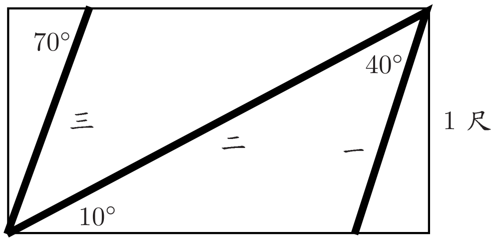
☒

動手玩數學

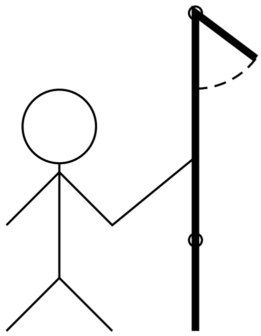
遊戲 **15**

☆☆☆☆☆

霍師父的三節棍被收藏在高度 1 尺的矩形木框內供遊客欣賞，如下圖所示。



霍師父的徒弟追憶說：「師父習武時，都會把前兩節直立，讓第三節自然下垂，垂下的點剛好在師父的頭頂位置。」



試求霍師父的身高。

利用銳角三角函數將三節棍的三小節表成三角含數的形式，再利用和差與積的互化公式求得霍師父的身高。在求霍師父的身高過程中，知道 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 的值是有幫助的，而且這個連乘積的求法很有名，也很特別。因為

$$\begin{aligned} 8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= 4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2\sin 80^\circ \cos 80^\circ \\ &= \sin 160^\circ \\ &= \sin 20^\circ, \end{aligned}$$

所以

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

⊠

動手玩數學

遊戲 **16**

☆☆☆☆☆

滿足 $a_{n+1} = 2 - a_n^2\ (n \geq 1)$ 的遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 會因第一項 a_1 的值不同而不同。例如，當 $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 時，計算前幾項，得

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \\
a_2 &= -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \\
a_3 &= -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \\
a_4 &= -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

很明顯的，數列 $\langle a_n \rangle$ 每兩項一循環，即奇數項為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，偶數項為 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。這樣的數列稱為週期 2 的數列。

如果首項 $a_1 = 2\cos 20^\circ$，那麼數列 $\langle a_n \rangle$ 如何描述呢？

現今世界上稍微瞭解一點混沌數學的人，無人不知李天岩與約克於 1975 年在《美國數學月刊》上發表了一篇極其重要的論文“週期三則亂七八糟”。該文首創了“混沌” (chaos) 的概念，開拓了整個科學界對混沌動力系統研究的新紀元。

李天岩畢業於清華大學，所以對中國高等教育中普遍存在的填鴨式教學深有體會，並深惡痛絕。他曾講過這樣的故事：一位數學研究生當博士資格考試的口試時，教授要考她證明特殊的吉洪諾夫（A. Tychonoff）定理：兩個緊緻集的乘積也是緊緻的，她央求教授讓她證明一般的吉洪諾夫定理：任意個數緊緻集之乘積也是緊緻的，因為她記得證明的每一個細節而不知道怎樣證明更簡單的兩個緊緻集的情形。李天岩堅決反對學生死記硬背，不求真懂。李天岩堅信，若是真正瞭解一門學科，就會講得連普通人也能聽得懂。

週期三則亂七八糟是自然界經常發現的現象，它是說在自然界裡，當你發現週期 3 的現象時，任何週期的現象都會發生。它表現在數列的現象就是，如果能找到一個初始值 a_1 使得數列 $\langle a_n\rangle$ 每三項一循環，即週期為 3，那麼對任意正整數 n，一定可以找到初始值 a_1 使得數列 $\langle a_n\rangle$ 每 n 項一循環，即週期為 n。當初始值 $a_1=2\cos 20^\circ$ 時，可以求 a_2, a_3, a_4 的值，並嘗試套用三角學的三倍角公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 來找該數列的循環性質。 ⊠

動　手
玩
數　學

遊戲 **17**

☆☆☆

將 18 個白球圍成一圓圈，甲、乙兩人進行塗色遊戲：

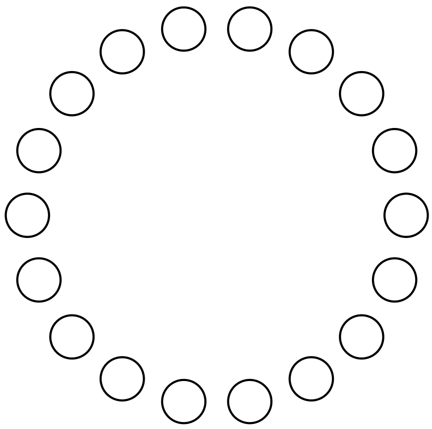
(1) 甲、乙輪流塗色，每次選取一個白球，把它塗成灰色。

(2) 塗過灰色的球不能再塗。

(3) 不能塗完色之後，發生相鄰兩球都是灰色的情形，這樣算違例。

(4) 放棄或違例者輸。

先塗色的甲或慢點塗色的乙有必勝的策略呢？



義大利詩人但丁說過「圓是最完美的圖形」，圓的完美來自於它有一個圓心，而圓周完全對稱於圓心。每天起床刷牙照鏡子就是在使用「對稱」的性質，因為太自然與熟悉了，所以反而容易失去對「對稱」兩字的戒心與關心。

在這遊戲裡，18 個白球圍成一圓圈就像鐘錶上的 12 個刻度一樣，有對稱關係。但是，如果將白球的個數設定為奇數，那麼遊戲的困難度就增加不少。有興趣的讀者不妨研究看看！